

Exercice pour s'entraîner

Étude d'un système optique embarqué sur un satellite

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et cartographie. Ce problème s'intéresse à l'instrumentation optique embarquée sur un satellite pour l'observation de la terre et plus particulièrement la prise de photographies numériques terrestres sur un capteur électronique photosensible depuis le satellite de télédétection.

A. Construction de l'image obtenue

Afin d'étudier les images de la surface de la Terre par un dispositif optique, nous nous plaçons dans le cadre de l'optique géométrique et de l'approximation de Gauss. L'espace entre la Terre et le satellite sera considéré comme du vide pour le tracé des rayons lumineux.

1. Comment qualifie-t-on les rayons lumineux utilisés dans l'approximation de Gauss ? Quelles sont leurs deux propriétés ?

Le dispositif optique permettant la photographie est modélisé simplement par une lentille sphérique mince convergente L de distance focale image f' et un capteur.

2. Compléter le schéma de la figure 1 de l'annexe à rendre avec la copie en traçant avec soin la construction de l'image d'un objet réel PM situé sur l'axe optique. Caractériser l'image P'M' obtenue : réelle ou virtuelle, agrandie ou rétrécie, de même sens ou inversée.

Déterminer par le calcul la valeur algébrique $\overline{OP'}$ en fonction de f' et calculer le grandissement dans ce cas.

3. L'objet PM se situe maintenant sur Terre à une distance de 35.10^3 km du satellite. La distance focale image de la lentille L est $f' = 5$ m.

3.1. Déterminer où se situe l'image de PM dans ce cas.

3.2. La taille des pixels du capteur est de $1\mu\text{m}$. Quelle est la dimension du plus petit objet détectable sur Terre ?

3.3. L'emprise sur le sol terrestre de l'image réalisée est de 70 km. En déduire le nombre de pixels sur la largeur du capteur.

4. Compléter le schéma de la figure 2 de l'annexe à rendre avec la copie en traçant avec soin le prolongement des rayons lumineux provenant d'un objet réel situé à l'infini dont les rayons sont inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique.

B. Influence de la longueur d'onde

Pour un milieu transparent comme le verre de la lentille mince utilisée, dans le domaine du visible, son indice de réfraction n varie avec la longueur d'onde λ suivant la loi empirique de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ où } A = 1,5 \text{ et } B = 3,8.10^3 \text{ nm}^2.$$

La distance focale image de la lentille L est donnée en fonction de son indice n par la relation :

$$f'(\lambda) = \frac{C}{n(\lambda) - 1}, \text{ } C \text{ étant une constante positive.}$$

Dans la suite, les notations adoptées sont synthétisées dans le tableau ci-après :

Couleur du rayonnement	Longueur d'onde (nm)	Pour la lentille		
		Indice	Distance focale image	Foyer image
bleu	$\lambda_B = 486$	n_B	f'_B	F'_B
Jaune	$\lambda_J = 589$	n_J	f'_J	F'_J
rouge	$\lambda_R = 656$	n_R	f'_R	F'_R

5. Montrer que l'expression de la distance focale image f'_J associée au rayonnement jaune peut s'écrire :

$$f'_J = \frac{C}{A-1} \left(1 + \frac{B}{(A-1)\lambda_J^2} \right)^{-1}$$

6. A partir des données numériques approximées, montrer que $\frac{B}{(A-1)\lambda_J^2} \ll 1$ en calculant une valeur approchée. Simplifier alors l'expression précédente en utilisant le développement du type : $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$, vrai quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

7. Comparer sans calcul numérique les distances focales image f'_R, f'_J, f'_B . Représenter sur votre copie un schéma indiquant les positions des foyers images F'_R, F'_J, F'_B , et le centre optique O de la lentille L .

8. Qu'est-ce que le stigmatisme ? Peut-on parler de stigmatisme dans le cas présent ? Quelle phénomène observe-t-on ?

C. Défaut d'observation longitudinal

L'aberration chromatique longitudinale $A_{CL} = \overline{F'_B F'_R}$ d'une lentille est définie par la distance algébrique qui sépare les foyers images bleu et rouge.

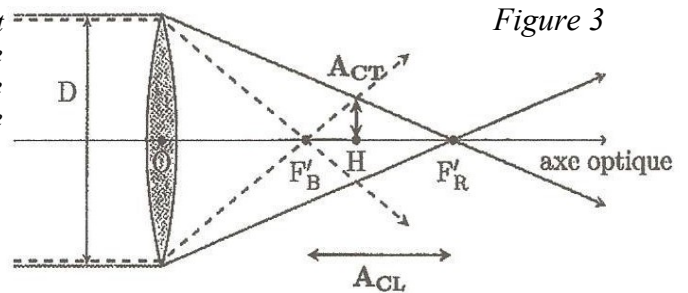
9. Exprimer A_{CL} en fonction de f'_R et f'_B . En supposant que $f'_R \times f'_B = f_J'^2$, montrer que : $\frac{A_{CL}}{f_J'^2} = \frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R}$

10. On définit le pouvoir dispersif K d'un verre par la relation : $K = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1}$. Montrer que A_{CL} , K et f'_J vérifient une relation simple. Application numérique : Déterminer A_{CL} pour $K = 1,4 \cdot 10^{-2}$ et $f'_J = 5 \text{ m}$. Commenter le résultat obtenu.

Défaut d'observation transversal

L'aberration chromatique transversale A_{CT} du dispositif est définie comme le rayon de la plus petite tache lumineuse produite par la superposition des faisceaux rouge et bleu provenant de rayons parallèle à l'axe optique et passant par les extrémités de la lentille L de diamètre D .

Cette définition est illustrée sur la figure 3 ci-contre :



11. A partir d'une étude géométrique de la figure 3, établir deux expressions de A_{CT} en fonction de D , f'_R et f'_B et des distances algébriques entre le point H et les foyers images F'_R et F'_B .

12. Montrer que $A_{CT}(f'_R + f'_B) = \frac{D}{2} A_{CL}$.

13. On suppose en plus de l'hypothèse de la question 9 ($f'_R \times f'_B = f_J'^2$) que $f'_J = \frac{f'_R + f'_B}{2}$. Déterminer l'expression de A_{CT} en fonction du pouvoir dispersif K et du diamètre D de la lentille.

Correction des défauts

Afin de limiter ces aberrations, une lentille sphérique mince L_2 de centre optique O_2 en verre flint (verre plus dispersif que la lentille précédente) est ajoutée. L'indice n_2 du verre flint suit également la loi de Cauchy : $n_2(\lambda) = A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2}$, A_2 et B_2 étant des constantes positives et $A_2 > 1$.

Sa distance focale image est donnée par la relation : $f'_2(\lambda) = \frac{C_2}{n_2(\lambda) - 1}$, C_2 étant une constante dont on cherche à déterminer le signe.

Cette deuxième lentille est accolée à la première lentille L de centre optique O . On suppose par la suite que les points O et O_2 sont confondus.

La distance focale image du système $\{L + L_2\}$ formé par les deux lentilles accolées est notée f'_T .

14. Montrer que pour une longueur d'onde donnée : $\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

15. Déterminer l'expression de $\frac{1}{f'_T}$ en fonction de A , B , C , A_2 , B_2 , C_2 et λ .

16. Établir une relation entre C , B , C_2 et B_2 permettant de supprimer totalement les aberrations chromatiques transversales et longitudinales.

17. Quel est nécessairement le signe de C_2 ? En déduire la nature convergente ou divergente de la lentille L_2 ?

Annexe problème 2

Schéma 1

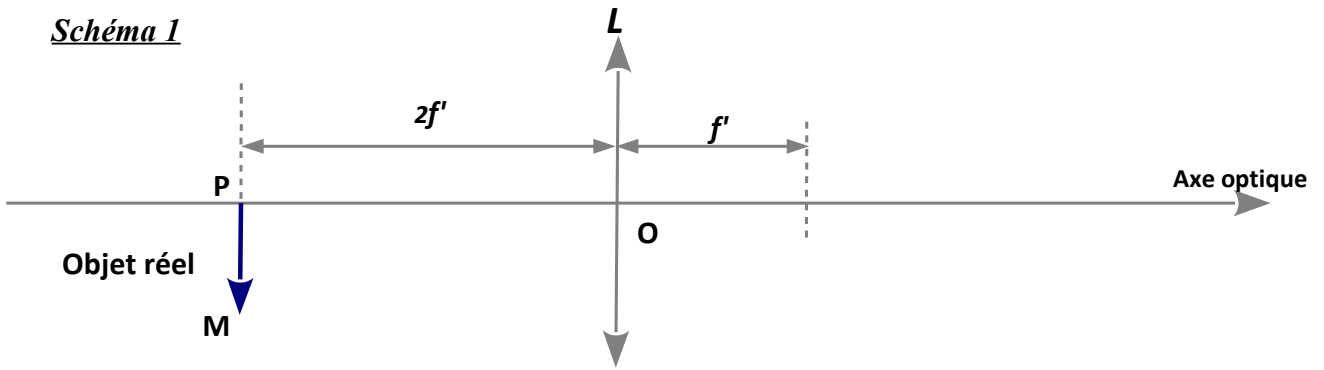
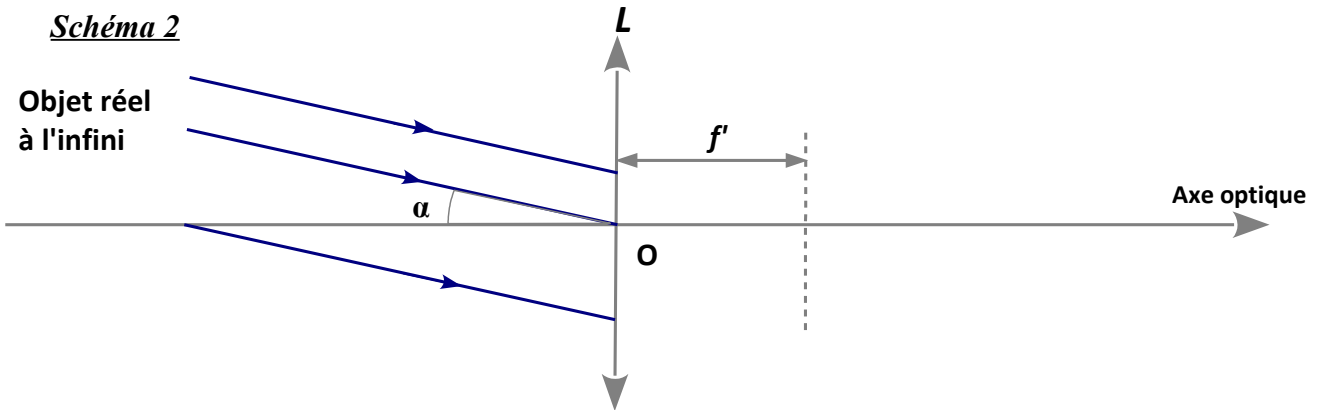


Schéma 2



Correction

Construction de l'image obtenue

1. Dans l'approximation de Gauss, les rayons sont paraxiaux, c'est-à-dire peu inclinés et peu écartés de l'axe optique (axe de révolution de l'instrument d'optique). On obtient alors un stigmatisme et un aplanétisme approchés.

2. Construction ci-contre, après avoir positionné F et F'.

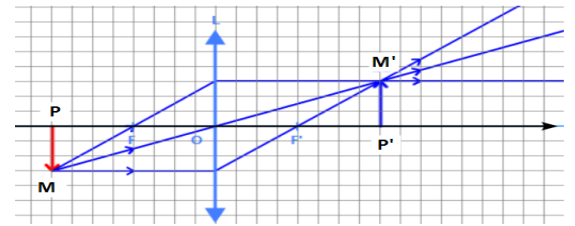
L'image est réelle, renversée et de même taille que l'objet.

D'après la formule de Descartes: $\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} = \frac{1}{f'}$ donc

$$\frac{1}{OP'} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{f'} = \frac{f' + OP}{OP \times OP'} \text{ donc } \boxed{OP' = \frac{f' \times OP}{f' + OP}}$$

D'après le schéma : $\boxed{OP = -2f'}$ donc $\boxed{OP' = \frac{f' \times -2f'}{f' - 2f'} = \frac{-2f'^2}{-f'} = 2f'}$

La formule du grandissement est : $\gamma = \frac{P'M'}{PM} = \frac{OP'}{OP}$ on en déduit : $\boxed{\gamma = \frac{2f'}{-2f'} = -1}$



3.1. $OP = 35\,000\text{ km}$; Ainsi $OP \gg f'$ donc : **l'image est dans le plan focal image.**

3.2. Pour que 2 points soient discernables sur le détecteur, ils doivent se trouver sur 2 pixels différents. L'image la plus petite discernable mesure $P'M'_{\min} = 1\mu\text{m}$. On se sert du grandissement pour déterminer la taille de l'objet correspondant.

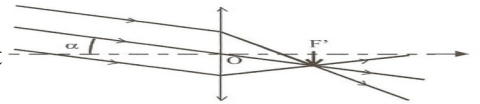
$$|\gamma| = \frac{P'M'}{PM} = \frac{OP'}{OP} \quad (1) \text{ Donc } PM_{\min} = P'M'_{\min} \times \frac{OP}{OP'}$$

AN : $\boxed{PM = 1.10^{-6} \times \frac{35.10^6}{5} = \frac{35}{5} = 7\text{ m}}$. La dimension du plus petit objet détectable sur la terre est de 7 m.

3.3. $PM = 70\text{ km}$, d'après la question précédente on en déduit qu'il faut **10000 pixels sur la largeur du capteur.**

4. On prolonge d'abord le rayon passant par O qui n'est pas dévié.

Les autres rayons incidents lui étant parallèles, les rayons émergents se croisent dans le plan focal image. D'où la construction.



Influence de la longueur d'onde

5. $f'_j(\lambda_j) = \frac{C}{n(\lambda_j) - 1}$ Or $n(\lambda_j) = A + \frac{B}{\lambda_j^2}$

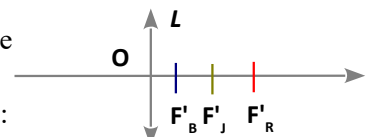
d'où $f'_j(\lambda_j) = \frac{C}{A + \frac{B}{\lambda_j^2} - 1} = \frac{C}{A-1} \times \frac{1}{1 + \frac{B}{\lambda_j^2(A-1)}} = \frac{C}{A-1} \times \left(1 + \frac{B}{(A-1)\lambda_j^2}\right)^{-1}$

6. $\boxed{\frac{B}{(A-1)\lambda_j^2} \approx \frac{4.10^3 \times 10^{-18}}{(1.5-1)36.10^{-14}} \approx 0,02 \ll 1}$

On alors $\left(1 + \frac{B}{(A-1)\lambda_j^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{B}{(A-1)\lambda_j^2}$ d'où $\boxed{f'_j(\lambda_j) = \frac{C}{A-1} \times \left(1 - \frac{B}{(A-1)\lambda_j^2}\right)}$

7. D'après le tableau, on a : $\lambda_B < \lambda_J < \lambda_R$, donc : $\frac{1}{\lambda_B} > \frac{1}{\lambda_J} > \frac{1}{\lambda_R}$ et donc d'après la formule

établie dans la question précédente : $\boxed{f'_R > f'_J > f'_B}$. On a obtenu le schéma ci-contre :



8. Stigmatisme : **L'image d'un point est un point.** La décomposition de la lumière par la lentille ne fait pas converger les rayons en un point unique. Il n'y a pas stigmatisme dans le cas présent. On parle d'aberrations chromatiques. **L'image aura des contours irisés.**

Défaut d'observation longitudinal

9. $A_{CL} = \overline{F'_B F'_R} = \overline{F'_B O} + \overline{O F'_R} = f'_R - f'_B$ donc $\frac{A_{CL}}{f'_B \times f'_R} = \frac{f'_R - f'_B}{f'_B \times f'_R}$ or $f'_R \times f'_B = f_J'^2$ ainsi

$\frac{A_{CL}}{f_J'^2} = \frac{f'_R - f'_B}{f'_B \times f'_R}$ d'où $\frac{A_{CL}}{f_J'^2} = \frac{1}{f'_B} - \frac{1}{f'_R}$.

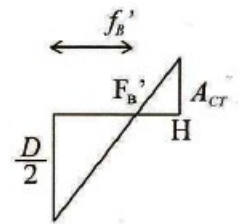
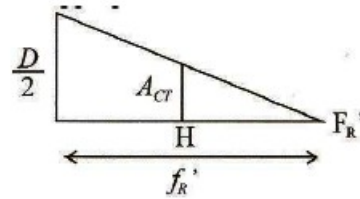
10. $f'(\lambda) = \frac{C}{n(\lambda) - 1}$ d'où $n(\lambda) = \frac{C}{f'(\lambda)} + 1$ d'où $K = \frac{\frac{C}{f'_B} - \frac{C}{f'_R}}{\frac{C}{f'_B f'_R}} = \frac{f'_R - f'_B}{f'_B f'_R} \times f'_J$ d'où $K = \frac{A_{CL}}{f'_J}$ d'où

$A_{CL} = K f'_J$.AN $A_{CL} = 1,4 \cdot 10^{-2} \times 5 = 7 \cdot 10^{-2} = 7 \text{ cm}$

Défaut d'observation transversal

11. D'après Thalès $\frac{\frac{D}{2}}{f'_R} = \frac{A_{CT}}{H F'_R}$ et $\frac{\frac{D}{2}}{f'_B} = \frac{A_{CT}}{F'_B H}$ d'où

$A_{CT} = \frac{D}{2} \times \frac{H F'_R}{f'_R}$ et $A_{CT} = \frac{D}{2} \times \frac{F'_B H}{f'_B}$



12. En additionnant les 2 expressions précédentes on obtient: $A_{CT}(f'_R + f'_B) = \frac{D}{2} \times (\overline{H F'_R} + \overline{F'_B H}) = \frac{D}{2} \times \overline{F'_B F'_R}$

d'où $A_{CT}(f'_R + f'_B) = \frac{D}{2} \times A_{CL}$.

13. $A_{CL} = K f'_J$ d'après la question 10, $f'_J = \frac{f'_R + f'_B}{2}$ d'où $A_{CT} = \frac{D}{4} \times K$.

Défaut d'observation transversal

14. Soit A' l'image conjuguée de A à travers le système optique. On a alors : $A \xrightarrow{L} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$

La formule de conjugaison appliquée à L_1 donne : $\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1}$

La formule de conjugaison appliquée à L_2 donne : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f'_2}$

En additionnant les 2 relations on obtient : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ d'où $\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

15. $\frac{1}{f'_T} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = \frac{n-1}{C} + \frac{n_2-1}{C} = \frac{A + \frac{B}{\lambda^2} - 1}{C} + \frac{A_2 + \frac{B_2}{\lambda^2} - 1}{C_2}$ d'où $\frac{1}{f'_T} = \frac{A-1}{C} + \frac{A_2-1}{C} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2} \right)$.

16. Pour supprimer les aberrations il faut f'_T soit indépendante de λ soit : $\frac{B}{C} + \frac{B_2}{C_2} = 0$.

17. B et B_2 d'après l'énoncé sont positifs, il faut donc que $C_2 < 0$. $f'_2 = \frac{C_2}{n_2 - 1}$ la seconde lentille est donc divergente.