L'opérateur gradient

1. Définition

Soit un champ scalaire *f(M)* des coordonnées de position, on associe à *f(M)* le vecteur $\overrightarrow{grad f}$ tel que:

$$\boxed{df = \overrightarrow{grad}\, f \,.\, d\,\overrightarrow{OM}}$$

Rem : l'opérateur gradient transforme un champ scalaire en un champ de vecteurs

2. Expression dans les différents systèmes de coordonnées

■ *Cas des coordonnées cartésiennes:*

$d\,\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$ et $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

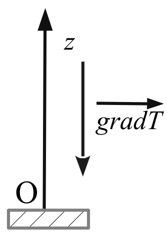
■ *Cas des coordonnées cylindriques*

$d\,\overrightarrow{OM} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\, d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z$ et $df = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z}$$

3. Signification physique

$\overrightarrow{gradf}$ **indique la direction et le sens de variation du champ scalaire.**



Exemple: Si la température de l'atmosphère terrestre en un point d'altitude *z* est : **T(z) =** *T(0) – a z .*

$\overrightarrow{grad}\, T = \dfrac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z = -a\,\vec{u}_z$ indique que T diminue quand z augmente *(a > 0).*

4. Circulation du vecteur gradient

■ *Circulation élémentaire*

- **Définition**

La circulation élémentaire d'un champ vectoriel $\vec{F}$ est: $\boxed{\delta C(\vec{F}) = \vec{F}.d\,\overrightarrow{OM}}$

- **Cas du vecteur gradient**

Par définition, la circulation élémentaire de $\overrightarrow{grad}\, f$ est $\boxed{\delta C(\overrightarrow{grad}\, f) = \overrightarrow{grad}\, f.d\,\overrightarrow{OM} = df}$

La circulation élémentaire du gradient d'une fonction f est la différentielle de la fonction f.

■ *Circulation le long d'un parcours AB*

- **Définition**

La circulation d'une fonction vectorielle $\vec{F}$ le long d'une courbe AB est :

$$\boxed{C_{AB}(\vec{F}) = \int_{AB} \delta C(\vec{F}) = \int_{AB} \vec{F}.d\,\overrightarrow{OM}}$$

- **Cas du vecteur gradient**

$$\boxed{C_{AB}(\overrightarrow{grad}\, f) = \int_{AB} \overrightarrow{grad}\, f \,.\, d\,\overrightarrow{OM} = \int_{f(A)}^{f(B)} df = f(B) - f(A)}$$

La circulation d'un gradient ne dépend pas du chemin suivi