Ex 2, EV de dim finie

a) <u>Remarques</u> :

- $\dim \mathbb{K}^3 = 3$. Une famille de 4 vecteurs peut être génératrice ou pas ; par contre on sait qu'elle est liée.
- 2 stratégies pour montrer qu'elle est génératrice :
    - re-créer avec ces vecteurs ceux d'une base, par exemple la base canonique ;
    - regarder si le rang de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs vaut le nombre de lignes (càd : 3).

<u>Stratégie 1</u> : Re-créons la base canonique avec $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$:

$$(1,0,0) = \vec{t} - \vec{w}$$
$$(0,1,0) = \vec{w} - \vec{v}$$
$$(0,0,1) = \frac{1}{2}\left(\vec{v} - (1,0,0) - (0,1,0)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\vec{v} - (\vec{t} - \vec{w}) - (\vec{w} - \vec{v})\right)$$
$$= \vec{v} - \frac{1}{2}\vec{t}$$

On a donc $\mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0)(0,0,1)\right) \subset \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$

Or $\mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,0),(0,1,0)\right) = \mathbb{K}^3$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}) = \mathbb{K}^3$

et <u>$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est génératrice</u>.

<u>Stratégie 2</u> : il suffit d'échelonner $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Pour extraire une base, il faut retirer les vecteurs qui "n'apportent rien". Ici la famille comporte 4 vecteurs et génère un espace à 3 dimension, il faut donc retirer un vecteur.

Rq : Potentiellement, il y a plusieurs bonnes réponses possibles. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si on considère $((1,0),(0,1),(1,1))$ chaque vecteur peut être retiré les deux restants forment une base.

- Ici le plus simple, si on a utilisé la stratégie 1 comme je l'ai fait plus haut, est de constater qu'on a re-créé la base canonique sans se servir de $\vec{u}$: il est donc "inutile". La famille $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{t})$ est génératrice dans un espace de dimension 3, c'est donc une base (et elle est libre).
- Si on a utilisé la stratégie 2 à la question (a), on peut retirer le vecteur correspondant à la colonne qui n'a pas de pivot.
- Worst case scenario : on a utilisé la stratégie 1 mais les 4 vecteurs interviennent. Il faut alors trouver une combinaison linéaire nulle et non triviale pour voir qu'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. On se ramène à la résolution d'un système linéaire.