Ex 4

L'univers est $\Omega = \{P ; F\}^3$, il y a équiprobabilité sur l'univers et donc $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(X) = \dfrac{\# X}{\# \Omega} = \dfrac{\# X}{8}$

a) $\mathbb{P}$("obtenir trois fois Pile") $= \mathbb{P}(\{(P,P,P)\}) = \dfrac{1}{8}$

b) $\mathbb{P}$("obtenir exactement une fois Pile") $= \mathbb{P}(\{(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P)\})$

$= \dfrac{3}{8}$

c) $\mathbb{P}$("obtenir au-moins une fois Pile") $= 1 - \mathbb{P}$("ne jamais obtenir Pile")

$= 1 - \mathbb{P}(\{(F,F,F)\}) = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

Ex 5

L'énoncé ne donne pas d'information pour savoir si les dés sont équilibrés (auquel cas on aura équiprobabilité sur l'univers) ou pas.

- Si les dés sont équilibrés, il y a équiprobabilité sur $\Omega = [\![1 ; 6]\!]^2$ et $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{36}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{36}$
on a donc $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$: A et B ne sont pas indépendants
- Si les dés sont truqués : on peut avoir des situations dans lesquelles A et B sont indépendants. Par exemple si le dé bleu tombe sur 6 avec une probabilité 1, on a :

$\mathbb{P}(A) = 0$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ (quelle que soit la loi de probabilité pour le dé rouge).

Ex 8

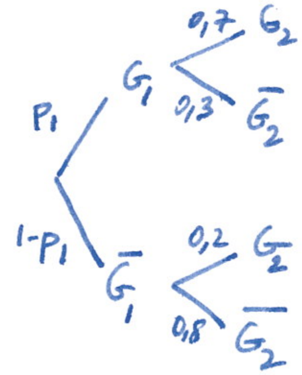
1) $p_1 = \mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2}$

et $p_2 = \mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(G_2 \cap G_1) + \mathbb{P}(G_2 \cap \overline{G_1})$

$= \mathbb{P}(G_1)\,\mathbb{P}_{G_1}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{G_1})\,\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(G_2)$

$= p_1 \times 0{,}7 + (1-p_1) \times 0{,}2$

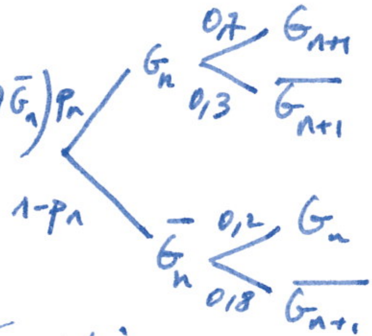
$= 0{,}45$



2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_{n+1} \cap G_n) + \mathbb{P}(G_{n+1} \cap \overline{G_n})$

$= 0{,}7\, p_n + 0{,}2\,(1-p_n)$

$= 0{,}5\, p_n + 0{,}2$



On reconnait une suite arithmético-géométrique (les questions qui suivent rappellent le mode d'étude de ce type de suite : se ramener à une suite géométrique)

3) (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \overbrace{(0{,}5\, p_n + 0{,}2)}^{p_{n+1}} - \frac{2}{5} = 0{,}5\, p_n - 0{,}2 = \frac{1}{2}(p_n - 0{,}4)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

Finalement, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

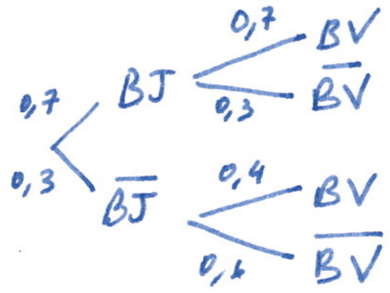
(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff v_n = \underbrace{\left(p_0 - \frac{2}{5}\right)}_{\frac{1}{10}} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{5 \cdot 2^n}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = v_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}$

(c) $2^n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

Ex 9

a) Supposons qu'il fasse beau mercredi. On a la situation



(BJ = "Beau jeudi"
BV = "Beau vendredi").

$$\mathbb{P}(BV) = \mathbb{P}(BV \cap BJ) + \mathbb{P}(BV \cap \overline{BJ}) \quad (*)$$

$$= \mathbb{P}(BJ)\,\mathbb{P}_{BJ}(BV) + \mathbb{P}(\overline{BJ})\,\mathbb{P}_{\overline{BJ}}(BV)$$

$$= 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}4$$

$$= 0{,}49 + 0{,}12$$

$$= 0{,}61$$

b) S'il ne fait pas beau le mercredi, (*) reste exacte mais les probabilités $\mathbb{P}(BJ)$ et $\mathbb{P}(\overline{BJ})$ changent pour devenir 0,4 et 0,6.

On a $\mathbb{P}(BV) = 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}6 \times 0{,}4$

$$= 0{,}28 + 0{,}24$$

$$= 0{,}52.$$