Les preuves doivent être connues, mais on s'attachera cette semaine plus à la connaissance du cours et à la réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$.
Isométries vectorielles : définition, caractérisations, propriétés.
Matrices orthogonales : définition, caractérisations.
Conséquences :

- ⋆ Si M est orthogonale, alors M^{-1} est orthogonale et : $M^{-1} = M^T$.
- ⋆ Le produit de 2 matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})n$ est une matrice orthogonale.
- ⋆ Si M est une matrice orthogonale, alors : $\det M = \pm 1$

Orientation et produit vectoriel, savoir : orienter un e.v. (choisir une b.o.n. de référence) ; b.o.n. directes ou indirectes. Orienter le plan par le choix d'un vecteur normal au plan (calcul d'un vecteur normal connaissant une équation du plan), savoir déterminer si une base d'un plan orienté est directe ou non. Savoir calculer un produit mixte de vecteurs. Savoir calculer un produit vectoriel en utilisant ses propriétés (bilinéarité, alternance, nul ssi vecteur colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, création d'une b.o.n. à l'aide du produit vectoriel)

Matrices orthogonales dans $O_2(\mathbb{R})$
Toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ lorsqu'elle est directe (matrice de rotation), et de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ lorsqu'elle est indirecte (matrice de symétrtie orthogonale par rapport à une droite) ($\theta \in \mathbb{R}$).

Produit de matrices R_θ, inverse, commutativité, lien avec les rotations dans le plan. Pas de valeur propre réelle si $\theta \neq 0[\pi]$.

Détermination de l'angle d'une rotation
Soit u une rotation plane d'angle θ et $\vec{x}$ un vecteur non nul.
Alors : $\cos\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}|u(\vec{x}))$ et $\sin\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

Réduction des isométries en dimension 3

1. En dimension 3, toute isométrie admet au moins une valeur propre (± 1).
2. Si u est une isométrie directe de E, alors 1 est valeur propre de u et il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et un réel θ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est une matrice de rotation plane.
3. Si u est une isométrie indirecte de E, alors -1 est valeur propre de u et il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et un réel θ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est une matrice de rotation plane.

Propriétés des rotations

Soit u une isométrie directe différente de l'identité.

1. L'ensemble des vecteurs invariants par u est une droite vectorielle, appelée **axe** de la rotation.
2. L'endomorphisme induit par u sur le plan orthogonal à l'axe est une rotation.
3. Si θ est l'angle de la rotation, alors : $\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.
4. Si $\vec{x}$ est un vecteur non nul orthogonal à l'axe, alors : $\cos\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}|u(\vec{x}))$ et $\sin\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{x}, u(\vec{x}))$, où $\vec{a}$ est un vecteur unitaire dirigeant l'axe.

Endomorphismes symétriques

symétriques, définition et caractérisation matricielle ; savoir réduire une matrice symétrique en b.o.n.

L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$, isomorphe au s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques. Il est donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Propriété des sous-espaces propres

Soit u un endomorphisme symétrique. Si λ et μ sont 2 valeurs propres distinctes de u, alors les s.e.p. $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Théorème spectral, matriciel et vectoriel. Pour u/A symétrique, il existe une b.o.n. de vecteurs propres. Autrement dit, tout endomorphisme symétrique est diagonalisable et ses s.e.p. sont 2 à 2 orthogonaux et pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

En conséquence, toutes les valeurs propres de A sont réelles et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Systèmes différentiels linéaires

Savoir résoudre un système linéaire de la forme $X' = A(t)A + B(t)$ avec A une matrice diagonale.