Intégration sur un intervalle quelconque

De manière générale :

Intégrale généralisée convergente, sur un intervalle semi-ouvert, puis sur un intervalle quelconque

Comparaison par inégalité de la convergence de l'intégrale de deux fonctions positives ; comparaison par inégalité de deux fonctions intégrables ou non.

Comparaison par équivalence, o ou O de deux fonctions intégrables ou non sur I.

Intégrales de Riemann ($\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$; $\int_1^+ \infty \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$), $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge ssi $\alpha > 0$; $\int_0^1 \ln t dt$ converge ; **Avec preuve**.

Propriétés de l'intégrale (Linéarité, positivité, croissance, définie positivité pour une fonction continue, fonctions à valeurs complexes). Savoir que ces propriétés se déduisent de celles de l'intégrale sur un segment par passage à la limite, sous réserve de l'existence d'une telle limite.

Fonctions intégrables : Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est **intégrable** sur I lorsque $\int_I |f(t)| \ dt$ converge.
On dit aussi que l'intégrale $\int_I f(t) \ dt$ est **absolument convergente**.

Produit scalaire et orthogonalité

Définitions : produit scalaire, espace préhilbertien réel, e.v. euclidien, vecteur unitaire/normé, vecteurs orthogonaux, vecteur orthogonal à un s.e.v., orthogonal d'un s.e.v., s.e.v. orthogonaux, famille orthogonale ou orthonormale

En particulier, $E^\perp = \{\vec{0}\}$.

Produits scalaires usuels :
Dans $\mathbb{R}^n$: si $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, on pose : $(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
Dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$: $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) \ dt$.
Dans $M_{n,p}$: $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}({}^t AB) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,i}$.
Dans $L^2_C(I, \mathbb{R})$, e.v. des fonctions continues sur I de carré intégrable : $(f|g) = \int_I f(t)g(t) \ dt$.
Dans $l^2(\mathbb{R})$, e.v. des suites réelles telles que la série $\sum u_n^2$ converge : $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

Identités de polarisation **avec preuve** :

1. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x}|\vec{y})$.
2. $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 4(\vec{x}|\vec{y})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz **avec preuve** :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, |(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la famille $(\vec{x},\vec{y})$ est liée.

Inégalité triangulaire **avec preuve** :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$