Produit scalaire et orthogonalité Toutes les preuves sont à savoir refaire.

Définitions : produit scalaire, espace préhilbertien réel, e.v. euclidien, vecteur unitaire/normé, vecteurs orthogonaux, vecteur orthogonal à un s.e.v., orthogonal d'un s.e.v., s.e.v. orthogonaux, famille orthogonale ou orthonormale

En particulier, $E^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Les produits scalaires usuels sont à connaître, mais il faut savoir qu'existent d'autres produits scalaires (et savoir les manipuler)

Identités de polarisation :

1. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x}|\vec{y})$.
2. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4(\vec{x}|\vec{y})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, |(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée.

Inégalité triangulaire :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Théorème de Pythagore

1. $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont orthogonaux <u>si et seulement si</u> : $\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|^2 = \|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2$.
2. <u>Si</u> $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ est une famille orthogonale, <u>alors</u> : $\left\|\sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{e}_i\|^2$.

Savoir appliquer à $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et en déduire $\|p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$

Existence d'une base orthonormée pour E de dimension finie non nulle ; Calculs dans une base orthonormée
Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E.

1. $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{e}_i|\vec{x})\vec{e}_i$.
2. Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de coordonnées respectives $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$, de matrices X et Y. Alors : $(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$ et $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X$.

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt : connaître et savoir utiliser la méthode.
Soit $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_q)$ une famille libre dans E. Il existe une famille orthonomée $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_q)$ telle que : $\forall k \in [\![1, q]\!], \text{Vect } (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k) = \text{Vect } (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k)$.

Si F est un s.e.v de dimension finie, alors F et son orthogonal sont supplémentaires dans E. Si E est de dimension finie, alors : $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.

Le projeté orthogonal $p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur caractérisé par les conditions : $p_F(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \perp F$.
Soit $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_q)$ une base <u>orthonormée</u> de F. Alors :

$$\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{q} (\vec{e}_i|\vec{x})\vec{e}_i.$$

Savoir calculer un projeté orthogonal, selon le cas, en résolvant un système linéaire ou en utilisant la formule de décomposition sur une b.o.n. (éventuellement sur une base orthogonale).

Inégalité de Bessel Soit $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_q)$ une famille orthonormale dans E. Alors :

$$\forall \vec{x} \in E, \sum_{i=1}^{q} (\vec{e}_k|\vec{x})^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

Distance d'un vecteur à un sous-espace
Soit un s.e.v. F et un vecteur $\vec{x} \in E$. La **distance** de $\vec{x}$ à F est définie par :

$$d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} d(\vec{x}, \vec{y}) = \inf_{\vec{y} \in F} \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Si F est de dimension finie, le vecteur $\vec{y}_0 = p_F(\vec{x})$ est l'unique vecteur de F tel que : $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - \vec{y}_0\|$.
On a donc : $d(\vec{x}, F)^2 = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|p_F(\vec{x})\|^2$.