

## Produit scalaire et orthogonalité

Programme identique au précédent.

En particulier, savoir exprimer tout vecteur dans une b.o.n ; calculer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un s.e.v. par résolution d'un système linéaire et par utilisation d'une b.o.n. ; calculer la distance d'un vecteur à un s.e.v..

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

On note  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Soit  $u$  un endomorphisme. Savoir définir et reconnaître une **valeur propre** de  $u$ , un **sous-espace propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , un **vecteur propre** de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , le **spectre** de  $u$ .

Connaître les éléments propres d'un projecteur non trivial.

Droite vectorielle stable

Une droite vectorielle est stable par  $u$  si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de  $u$ .

Images itérées d'un vecteur propre

Soit  $\vec{x}$  un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a alors :  $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(\vec{x}) = \lambda^k \vec{x}$ , et pour tout polynôme  $P : P(u)(\vec{x}) = P(\lambda)\vec{x}$ .

Valeur propre et polynôme annulateur

Soit  $P$  un polynôme annulateur de  $u$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . Alors :  $P(\lambda) = 0$ .  
(Les valeurs propres de  $u$  sont parmi les racines de  $P$ .)

**Conséquence** : Si  $u$  est un endomorphisme nilpotent, sa seule valeur propre est 0.

# Annexes

## Pour retravailler le cours :

### Preuve valeur propre de $u$ nilpotent :

Soit  $u$  endomorphisme nilpotent de  $E$ . Il existe  $m > 0$  tel que  $u^m = 0_{L(E)}$ , autrement dit, le polynôme  $X^m$  annule  $u$ . Les v.p. de  $u$  sont donc incluses dans l'ensemble  $\{0\}$ .

Il faut encore montrer que 0 est effectivement une valeur propre de  $u$ . Pour cela, considérons un élément non nul de  $E$ , qu'on note  $x$ .

Posons  $V = \{k \in \mathbb{N} / u^k(x) = 0_E\}$ . L'ensemble  $V$  est une partie de  $\mathbb{N}$  non vide, puisque  $m$  y appartient. Il admet donc un plus petit élément  $p$ . Alors  $u^p(x) = 0$ , mais  $u^{p-1}(x) \neq 0$ . Or  $u^p(x) = u(u^{p-1}(x))$ . Ainsi  $u(u^{p-1}(x)) = 0 \times u^{p-1}(x) : u^{p-1}(x)$ , non nul, est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre 0.

L'unique valeur propre de tout endomorphisme nilpotent est donc 0.

**Polynôme d'endomorphismes** La puissance se comprend au sens de la composition de fonctions.

Ainsi  $X^2(u) = u \circ u$ , et ainsi de suite.

Par exemple, si  $(e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , et si  $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2$  et  $u(e_2) = -e_1 + e_2$ , que valent  $(X + 1)(u)$ ,  $(X^2 - 2)(u)$  ?

On commence par remplacer chaque scalaire  $\lambda$  par  $\lambda \text{Id}$  (puisque  $1 = x^0$ , et  $u^0 = \text{Id}$ ) et chaque occurrence de  $X$  par  $u$ , ce qui donne respectivement  $u + \text{Id}$  (qui à  $e_1$  associe  $u(e_1) + \text{Id}(e_1) = 4e_1 + 2e_2$  et à  $e_2$  associe  $u(e_2) + \text{Id}(e_2) = -e_1 + 2e_2$ ) et  $u^2 - 2\text{Id} = u \circ u - 2\text{Id}$  (dont vous pouvez également calculer l'image sur la base  $(e_1, e_2)$ )

Vérifier que  $((X^2 + 1) \times (3X - 7))(u) = (X^2 + 1)(u) \circ ((3X - 7)(u))$ . Le vérifier pour d'autres couples de polynômes, jusqu'à avoir l'intuition de la preuve dans le cas général.

### Preuve dans le cas général :

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes, qu'on écrit sous la forme  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$  et  $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$  (quitte à avoir des coefficients nuls).

Alors  $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{i=0}^n a_i u^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^n b_j u^j\right)$  or  $u$  est linéaire (et pour tout  $k$ ,  $u^k$  l'est également).

Par suite  $P(u) \circ Q(u) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n b_j u^i \circ u^j = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n b_j u^{i+j} = \left(\sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^n b_j X^{i+j}\right)(u) = \left(\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^n b_j X^j\right)\right)(u) = (P \times Q)(u)$ .

☞ On retient que  $P(u)$  est un endomorphisme de  $E$ , non un élément de  $E$  ! Si on note  $v$  cet endomorphisme, alors pour  $x$  de  $E$ ,  $P(u)(x) = v(x) \in E$ .

### Droite vectorielle stable :

Soit  $x$  un vecteur propre de  $u$ , montrer que  $\text{Vect } \{x\}$  est stable par  $u$ , c'est prendre tout vecteur  $y$  de  $\text{Vect } \{x\}$ , et montrer que  $u(y)$  est encore dans  $\text{Vect } \{x\}$ . Inversement, soit une droite vectorielle. Une bonne idée est d'en donner un vecteur directeur, et de montrer que tout élément proportionnel à ce vecteur est soit nul, soit un vecteur propre de  $u$ .

### **Images itérées d'un vecteur propre**

Soit  $x$  un vecteur propre associé à la vp  $\lambda$ , on montre par récurrence que pour tout  $k$ ,  $u^k(x) = \lambda^k x$ . Par définition des opérations sur les fonctions, pour tout polynôme  $P$ ,  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

**Valeur propre et polynôme annulateur** Si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , et  $P$  annulateur de  $u$ , ce qui précède implique qu'il existe  $x \neq 0_E$ , tel que  $P(\lambda)x = 0_E$ , et donc...

Rappel du programme précédent :

## Produit scalaire et orthogonalité

Toutes les preuves sont à savoir refaire.

Définitions : produit scalaire, espace préhilbertien réel, e.v. euclidien, vecteur unitaire/normé, vecteurs orthogonaux, vecteur orthogonal à un s.e.v., orthogonal d'un s.e.v., s.e.v. orthogonaux, famille orthogonale ou orthonormale

En particulier,  $E^\perp = \{\vec{0}\}$ . Les produits scalaires usuels sont à connaître, mais il faut savoir qu'il existe d'autres produits scalaires (et savoir les manipuler)

Identités de polarisation :

1.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x}|\vec{y})$ .
2.  $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 4(\vec{x}|\vec{y})$ .

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, |(\vec{x}|\vec{y})| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si la famille  $(\vec{x}, \vec{y})$  est liée.

Inégalité triangulaire :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Théorème de Pythagore

1.  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont orthogonaux si et seulement si :  $\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\|^2 = \|\vec{e}_1\|^2 + \|\vec{e}_2\|^2$ .
2. Si  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une famille orthogonale, alors :  $\left\|\sum_{i=1}^n \vec{e}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\vec{e}_i\|^2$ .

Savoir appliquer à  $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$  et en déduire  $\|p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$

Existence d'une base orthonormée pour  $E$  de dimension finie non nulle ; Calculs dans une base orthonormée

Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

1.  $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\vec{e}_i|\vec{x})\vec{e}_i$ .
2. Soient  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de coordonnées respectives  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathcal{B}$ , de matrices  $X$  et  $Y$ . Alors :  $(\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$  et  $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T X$ .

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt : connaître et savoir utiliser la méthode.

Soit  $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_q)$  une famille libre dans  $E$ . Il existe une famille orthonormée  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$  telle que :  $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ .

Si  $F$  est un s.e.v de dimension finie, alors  $F$  et son orthogonal sont supplémentaires dans  $E$ . Si  $E$  est de dimension finie, alors :  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ .

Le projeté orthogonal  $p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur caractérisé par les conditions :

$$p_F(\vec{x}) \in F \text{ et } \vec{x} - p_F(\vec{x}) \perp F.$$

Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$  une base orthonormée de  $F$ . Alors :

$$\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^q (\vec{e}_i | \vec{x}) \vec{e}_i.$$

Savoir calculer un projeté orthogonal, selon le cas, en résolvant un système linéaire ou en utilisant la formule de décomposition sur une b.o.n. (éventuellement sur une base orthogonale).

Inégalité de Bessel Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_q)$  une famille orthonormale dans  $E$ . Alors :

$$\forall \vec{x} \in E, \sum_{i=1}^q (\vec{e}_i | \vec{x})^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit un s.e.v.  $F$  et un vecteur  $\vec{x} \in E$ . La **distance** de  $\vec{x}$  à  $F$  est définie par :

$$d(\vec{x}, F) = \inf_{\vec{y} \in F} d(\vec{x}, \vec{y}) = \inf_{\vec{y} \in F} \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Si  $F$  est de dimension finie, le vecteur  $\vec{y}_0 = p_F(\vec{x})$  est l'unique vecteur de  $F$  tel que :  $d(\vec{x}, F) = \|\vec{x} - \vec{y}_0\|$ .

On a donc :  $d(\vec{x}, F)^2 = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \|p_F(\vec{x})\|^2$ .