Réduction des endomorphismes et des matrices carrées E : $\mathbb{K}$-e.v. ; $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim E = n < +\infty$ (n non nul), on considère $A \in M_n(\mathbb{K})$ représentant u dans une base de E.

Éléments propres - Définitions : Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Connaître les éléments propres d'un projecteur non trivial, d'une symétrie non triviale, d'un endomorphisme nilpotent.

Savoir reconnaître ou chercher vecteurs et valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Distinguer spectre réel et spectre complexe.

Rappels :
Une droite vectorielle est stable par u si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de u.
Images itérées d'un vecteur propre Soit $\vec{x}$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(\vec{x}) = \lambda^k \vec{x}$, et pour tout polynôme P : $P(u)(\vec{x}) = P(\lambda)\vec{x}$.
Valeur propre et polynôme annulateur
Soit P un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u. Alors : $P(\lambda) = 0$.
(Les valeurs propres de u sont parmi le racines de P.)
Stabilité d'un sous-espace propre
Tout sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie vectorielle $\lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda(u)}$.
Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Somme directe

1. Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.
2. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si E est de dimension finie $n > 0$, le nombre de valeurs propres de u est au maximum égal à n.

Endomorphisme en dimension finie Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - e.v. E de dimension finie $n > 0$, et A la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}$ fixée de E. Les valeurs propres de u sont les mêmes que les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$, et les sous-espaces propres de u et de A sont canoniquement isomorphes.

Conséquence : Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres, et des sous-espaces propres de même dimension.

Polynôme caractéristique

- ⋆ Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le **polynôme caractéristique** de A est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

  De même, si u est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie, le **polynôme caractéristique** de u est défini par : $\forall x \in \mathbb{K}, \chi_u(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - u)$.
- ⋆ Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré n.
- ⋆ Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.
- ⋆ Une matrice carrée d'ordre n possède au plus n valeurs propres distinctes (de même pour un endomorphisme d'un e.v. de dimension n).
- ⋆ Toute matrice carrée admet au moins une valeur propre complexe (de même, pour tout endomorphisme d'un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie), mais pas nécessairement de valeur propre réelle.
- ⋆ Pour toute matrice carrée A, on a : $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda}$ et $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda \lambda$.
- ⋆ Soit F un s.e.v. stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u.

Théorème de Cayley-Hamilton admis Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$ et de même si l'e.v. est de dimension finie : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Multiplicité et dimension du sous-espace propre
Soit λ une valeur propre de A (ou de u). On a alors l'encadrement : $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$.
Si λ est une valeur propre simple, le s.e.p. associé est une droite vectorielle

Diagonalisation et trigonalisation - Définitions :
Définitions : matrice/endomorphisme (en dimension finie) trigonalisable/diagonalisable.
Avoir une notion de l'intérêt de la diagonalisabilité/ trigonalisabilité.

Diagonalisabilité d'une matrice symétrique réelle - Admis Toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
En particulier, ses valeurs propres sont toutes réelles.

Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité - Admis Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
En particulier, toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
Soit A trigonalisable, semblable à T triangulaire. La multiplicité des valeurs propres se lit sur la diagonale de T.

Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable

1. u est diagonalisable si et seulement si E possède une base formée de vecteurs propres de u.
2. u est diagonalisable si et seulement si : $\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.
3. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

En particulier, si $\dim E = n$ et si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. De même, toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
Si u est diagonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \cdots, \lambda_q I_{m_q})$, où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de u et m_k est la multiplicité de λ_k.

Caractérisations par polynôme annulateur - Admis

1. u est diagonalisable si et seulement si le polynôme
$$P(X) = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$$
est un polynôme annulateur de u.
2. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable
Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un s.e.v. de E stable par u.
Alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.

Annexes

Pour retravailler le cours :

Toutes les démonstrations ne sont pas fournies ici, vous DEVEZ les prendre en note durant le cours, et poser des questions si besoin. J'en ajoute certaines non exigibles pour ceux qui feraient preuve de curiosité - il est toujours intéressant de les maîtriser, exigibles ou non. Certains points ne sont pas détaillés, sans être triviaux. Ils sont indiqués par : (*).

※ **Tout sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est l'homothétie vectorielle $\lambda \mathbf{Id}_{E_\lambda(u)}$.**

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et x in $E_\lambda(u)$. On remarque que $u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) \in E_\lambda(u)$, puisque x est v.p. associé à λ de u et par linéarité de u. La seconde assertion est conséquence directe de la définition de $E_\lambda(u)$. □

※

1. **Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.**
2. **Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.**

Démonstration. On procède par récurrence sur le nombre p de sous-espaces propres de u.

Posons $\mathcal{P}$ la propriété : pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$: n sous-espaces propres de u sont en somme directe.

<u>Initialisation :</u> au rang $n = 2$
Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes.
Soit $x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u)$. Alors $u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$, ce qui n'est possible que si $x = 0_E$: ces deux sous-espaces propres sont en somme directe : $\mathcal{P}_2$ est vérifiée.

<u>Hérédité :</u> supposons la propriété vraie au rang n, pour un certain $n \geq 2$.
Soit alors $x = \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i$, avec, pour tout $1 \leq i \leq n+1$, $x_i \in E_{\lambda_1}(u)$.
Supposons que $x = 0_E$ et montrons qu'alors, pour tout i, $x_i = 0_E$.
Par linéarité, $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} u(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0_E$.
En soustrayant terme à terme à cette égalité l'égalité $\lambda_{n+1} x = 0_E$, on obtient l'égalité suivante :
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_i) x_i = 0_E$.
Le dernier terme de la somme étant nul, l'égalité devient :
$\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_{n+1} - \lambda_i) x_i = 0_E$.
Par hypothèse de récurrence, et puisque pour tout $i \leq n$, $\lambda_{n+1} - \lambda_i \neq 0$, cela impose que pour tout i, $x_i = 0_E$, puis que $x_{n+1} = 0_E$.

Ceci étant vrai pour tous $x_1, ..., x_{n+1}$, on en conclut que les $n+1$ sous-espaces propres de u sont en somme directe : $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence, on en conclut que les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

Par ailleurs, on peut montrer que les deux assertions sont équivalentes :

• Supposons que les sous-espaces propres de u sont en somme directe. Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit $x_i \in E_{\lambda_i}(u) \backslash \{0_E\}$, et (μ_i) un scalaire.

Alors pour tout $i \leq n$, $\mu_i x_i \in E_{\lambda_i}(u)$, et, par hypothèse, si $\sum\limits_{i \leq n} \mu_i x_i = 0_E$, alors, pour tout $i \leq n$, $\mu_i x_i = 0_E$. Chaque x_i étant non nul, cela implique que pour tout $i \leq n, \mu_i = 0$: la combinaison linéaire est triviale. Ainsi toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libres.

• Inversement, supposons que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes soit libre, et montrons qu'alors la somme des sous-espaces propres est directe.

Soit une décomposition de 0_E sur ces sous-espaces propres : $0_E = \sum\limits_{i \leq n} x_i$, avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i \leq n$.

Chaque x_i est soit le vecteur nul, soit un vecteur propre de u associé à λ_i. Si les x_i sont non tous nuls, on dispose donc d'une combinaison linéaire non triviale nulle : c'est absurde, et chaque x_i est nul.

Ainsi, les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe.

□

※ Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Démonstration. Supposons que u et v commutent.

Soit $\lambda \in Sp(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$: ainsi soit $v(x) = 0_E \in E_\lambda(u)$, soit $v(x) \neq 0_E$ et $v(x) \in E_\lambda(u)$. Ceci étant valable pour tout $\lambda \in Sp(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$, tout sous-espace propre de u est bien stable par v.

□

※ Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ - e.v. E de dimension finie $n > 0$, et A la matrice représentative de u dans une base $\mathcal{B}$ fixée de E. Les valeurs propres de u sont alors les mêmes que les valeurs propres de A dans $\mathbb{K}$, et les sous-espaces propres de u et de A sont canoniquement isomorphes.

Démonstration. - Idée

On note $\mathcal{B}$ une base de E. Alors Mat_B est un isomorphisme de E dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$, et Mat_B est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $M_{n,n}(\mathbb{K})$. C'est cet isomorphisme qui permet de montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme et de toute matrice le représentant sont les mêmes (et que leurs s.e.p. sont isomorphes). On en déduit que deux matrice semblables ont les mêmes valeurs propres, et que leurs s.e.p. sont de même dimension.

□

※Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Démonstration. Le scalaire λ est valeur propre de A ssi $\exists X \neq 0_E, AX = \lambda X$, soit ssi $\lambda\mathrm{Id} - A$ est non inversible, soit ssi $\det(\lambda\mathrm{Id} - A) = 0$.

Et puisque $\det A = \det A^T$ pour toute matrice A, on en déduit que A et A^T ont le même polynôme caractéristique, et donc le même spectre.

On en déduit également que toute matrice carrée d'ordre n, tout endomorphisme d'un e.v. de dimension n possède au plus n valeurs propres distinctes.

Et comme tout polynôme à valeurs complexes (et en particulier tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$) est scindé dans $\mathbb{C}$, toute matrice carrée d'ordre n, tout endomorphisme d'un e.v. de dimension n possède au moins une valeur propre complexe. □

Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré n. Pour toute matrice carrée A, on a : $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda}$ **et** $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda \lambda$**.**

Démonstration. - Idée

On montre par récurrence et en développant par rapport à la première colonne que le déterminant d'une matrice d'ordre n dont les coefficients diagonaux d_i s'écrivent $d_i(x) = x - a_{ii}$ et les autres coefficients sont des scalaires est de la forme $\prod_{i=1}^{n}(d_i(x)) + P(x)$, avec $P(x)$ un polynôme de degré au plus $n-2$.

Une fois ce point assuré, on remarque que $\prod_{i=1}^{n}(d_i(x))$ est un polynôme unitaire de degré n, dont le coefficient devant le monôme x^{n-1} vaut $-\sum a_{ii} = -\mathrm{tr}(A)$.

En effet, le développement de ce produit ne donne qu'un seul terme en x^n, de coefficient 1. Pour obtenir un terme en x^{n-1}, il faut choisir parmi les n facteurs du produit $n-1$ x, et choisir dans le dernier facteur le terme $-a_{i,i}$, et cela, pour tout i. La somme de ces termes donne donc $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x^{n-1}$. Une preuve par récurrence, moins combinatoire, plus analytique permettrait d'assurer le même résultat.

□

Soit F un s.e.v. stable par u et u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u.

Démonstration. - Indication

Constater d'abord que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, puis utiliser les propriétés du déterminant.

□

Multiplicité et dimension du sous-espace propre

Soit λ une valeur propre de A (ou de u). On a alors l'encadrement : $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda$.
Si λ est une valeur propre simple, le s.e.p. associé est une droite vectorielle

Démonstration. La première inégalité découle de l'existence d'au moins une droite vectorielle de vecteurs propres pour chaque valeur propre. La seconde inégalité se montre en observant l'endomorphisme induit sur E_λ : le polynôme caractéristique d'un tel endomorphisme est $\prod_{i=1}^{\dim(E_\lambda)} (x-\lambda) = (x-\lambda)^{\dim(E_\lambda)}$. Ce polynôme divisant le polynôme caractéristique de u (ou A), où la multiplicité de λ est m_λ, le résultat suit.

□

Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité - Admis Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
En particulier, toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Soit A trigonalisable, semblable à T triangulaire. La multiplicité des valeurs propres se lit sur la diagonale de T.

Démonstration. Idée - La rédaction de la récurrence serait, sur une copie, à effectuer en restant au plus près du formalisme habituel.

On procède par récurrence :

Si la matrice est d'ordre 1, RAS.

Si la matrice est d'ordre n :

Supposons que le polynôme caractéristique d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il admet donc une racine, qu'on note λ.

Il existe alors x non nul, de représentation dans la base canonique X, tel que $AX = \lambda X$. On complète la famille (x) en base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$: $(x, e_2, ..., e_n)$, et on note F l'espace engendré par $(e_2, ..., e_n)$.

On note p_F la projection sur le s.e.v. F suivant x. La fonction $(p_F \circ u)_{|_F}$ est un endomorphisme(*) de F, qui est de dimension $n-1$. De plus, son polynôme caractéristique divisant celui de u(*), il est également scindé. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_2, ..., f_n)$ de F dans laquelle la représentation matricielle de $(p_F \circ u)_{|_F}$ est triangulaire.

On remarque que $\forall 2 \leq i \leq n, \exists a_i, u(f_i) = a_i x + (p_F \circ u)_{|_F}(x)$. Ceci permet de conclure que la représentation matricielle de u dans la base $(x, f_2, ..., f_n)$ est triangulaire.

□

Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable

1. u est diagonalisable si et seulement si E possède une base formée de vecteurs propres de u.
2. u est diagonalisable si et seulement si : $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.
3. u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

En particulier, si $\dim E = n$ et si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. De même, toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Si u est diagonalisable, il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit sous la forme $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \cdots, \lambda_q I_{m_q})$, où les λ_k sont les valeurs propres distinctes de u et m_k est la multiplicité de λ_k.

Démonstration. • La première équivalence correspond à la définition de la diagonalisabilité. On va donc montrer que les conditions nécessaires et suffisantes s'impliquent de manière circulaires (et sont donc équivalentes).

• Si on dispose d'une base formée de vecteurs propres, la dimension de E est égale au nombre des éléments de cette base. D'autre part, chaque sous-espace propre est de dimension au moins le nombre de vecteurs propres de la base de E qui lui appartiennent. Ceci impose, puisque les s.e.p. sont en somme directe, que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \geq \dim E$, l'autre inégalité étant assurée par le fait que la somme directe des sous-espaces propres est incluse dans E.

• Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$. De plus, $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda = n$. Il s'ensuit que si $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$, nécessairement $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

• Supposons que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe une base $(e_1^\lambda, ..., e_{m_\lambda}^\lambda)$ de $E_\lambda(u)$. Les s.e.p. de u étant en somme directe, la réunion de ces bases est une famille libre de E de cardinal maximal : c'en est une base. On dispose donc d'une base de E, tel que chaque élément de la base est un vecteur propre de u : dans cette base, la matrice de u est diagonale.

□

Caractérisations par polynôme annulateur - Admis

1. u est diagonalisable si et seulement si le polynôme

$$P(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$$

   est un polynôme annulateur de u.

2. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

Démonstration. - Idée

Si u est diagonale, on vérifie aisément que le polynôme proposé annule u. Si u est diagonalisable, il en va de même (écrire $A = PDP^{-1}$).

Le premier point entraîne le second sans difficulté. Rappel : le spectre d'un endomorphisme est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme qui l'annule.

Pour montrer le second point, il faut passer par le **lemme des noyaux**(ou théorème de décomposition des noyaux - voir feuille d'exercices).

Ce lemme affirme que, pour tous P_i des polynômes premiers entre eux, $\ker(P_1 \times ... \times P_k) = \bigoplus \ker P_i$.

Rappel : si un polynôme P annulateur de u est à racines simples, le spectre de u est exactement composé des racines de P. S'il existe un polynôme annulateur scindé et à racines simples de u, il s'exprime sous la forme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$: c'est un produit de polynômes premiers entre eux.

Puisque P annule u, $\ker(P_1 \times ... \times P_k) = E$. Alors, d'après le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \mathrm{Id}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. On conclut avec les caractérisations déjà connues de diagonalisabilité.

□

Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable

Soit u un endomorphisme diagonalisable et F un s.e.v. de E stable par u.
Alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est diagonalisable.

Démonstration. L'endomorphisme u est diagonalisable donc il existe un polynôme scindé à racines simples l'annulant. Puisque F est stable par u, le même polynôme annule u_F(*). Le résultat suit.

□

Pour les plus curieux : que se passe-t-il en dimension infinie ?

• Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il n'existe pas forcément de polynôme non nul annulant u.

En dimension finie, le polynôme caractéristique annule u, mais celui-ci n'est pas défini en dimension infinie. On peut même exhiber un certain u endomorphisme, qu'aucun polynôme ne peut annuler (et on va le faire !).

Ainsi, pour $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, on considère u, t.q. $u(P) = XP$.

Ainsi, $u(X) = X^2$, $u(3X + 1) = 3X^2 + X$ et ainsi de suite.

Qu'en est-il des polynômes en u ?

Par exemple, $X(u) = u$, donc $X(u)(P) = XP$; $X^2(u) = u^2$, puis $X^2(u)(P) = X^2P$.

Soit maintenant P un polynôme annulant u. On a $P(u) = 0$, et, simultanément, $P(u)(1) = P$, qui ne vaut $0_{\mathbb{R}[X]}$ que si P est le polynôme nul.

• On a précédemment défini le projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension finie. Ne peut-on pas construire le projeté orthogonal sur un s.e.v. de dimension infinie ?

Considérons à nouveau l'e.v. des polynômes à coefficients réels $R[X]$ muni de son produit scalaire usuel, et F l'hyperplan Vect $(1 + X, 1 + X^2, ..., 1 + X^n, ...)$.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à F est réduit à $\{0\}$. Soit un élément de E qui ne soit pas dans F. On ne peut le décomposer en une somme d'un élément de F et de son orthogonal ; dit autrement, la notion de projeté orthogonal sur F n'a ici pas de sens.

Conclusion : s'il est précisé en dimension fini quelque part, ce n'est sûrement pas pour rien !