Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Caractérisations de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité.
Une matrice réelle symétrique est diagonalisable.

Isométries vectorielles et matrices orthogonales

E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$.
Définitions : isométrie vectoriel, matrice orthogonale

Caractérisations d'une isométrie Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une isométrie vectorielle, i.e. un endomorphisme qui conserve la norme (définition)
2. u conserve le produit scalaire, i.e : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, (u(\vec{x})|u(\vec{y})) = (\vec{x}|\vec{y})$.
3. l'image d'une base orthonormée fixée de E est une base orthonormée.

Propriétés des isométries

1. Si u est une isométrie, alors u est bijective et u^{-1} est une isométrie.
2. La composée de deux isométries est une isométrie.
3. Soient $u \in O(E)$, F un s.e.v. stable par u. Alors : $u(F) = F$ et $F^\perp$ est stable par u.
4. Soit $u \in O(E)$. Alors : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ et les s.e.v. $\ker(f - id_E)$ et $\ker(f + id_E)$ sont orthogonaux.

Caractérisations d'une matrice orthogonale Soit $M \in M_n(\mathbb{R})n$. Les propositions suivantes sont équivalentes

1. l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle (déf. M orthogonale).
2. les colonnes de M forment une base orthonormée de $M_n(\mathbb{R})n, 1$.
3. M est une matrice de changement de base orthonormale.
4. $MM^T = I_n$, ou encore : $M^T M = I_n$.

Un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si sa matrice représentative dans une base orthonormée fixée de E est une matrice orthogonale.

Conséquences :

- ⋆ Si M est orthogonale, alors M^{-1} est orthogonale et : $M^{-1} = M^T$.
- ⋆ Le produit de 2 matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})n$ est une matrice orthogonale.
- ⋆ Si M est une matrice orthogonale, alors : $\det M = \pm 1$

Orientation et produit vectoriel, savoir : orienter un e.v. (choisir une b.o.n. de référence) ; b.o.n. directes ou indirectes. Orienter le plan par le choix d'un vecteur normal au plan (calcul d'un vecteur normal connaissant une équation du plan), savoir déterminer si une base d'un plan orienté est directe ou non. Savoir calculer un produit mixte de vecteurs.

Savoir calculer un produit vectoriel en utilisant ses propriétés (bilinéarité, alternance, nul ssi vecteur colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, création d'une b.o.n. à l'aide du produit vectoriel)

Matrices orthogonales dans $O_2(\mathbb{R})$

Toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ lorsqu'elle est directe (matrice de rotation), et de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ lorsqu'elle est indirecte (matrice de symétrtie orthogonale par rapport à une droite) ($\theta \in \mathbb{R}$).

Produit de matrices R_θ, inverse, commutativité, lien avec les rotations dans le plan. Pas de valeur propre réelle si $\theta \neq 0[\pi]$.

Détermination de l'angle d'une rotation

Soit u une rotation plane d'angle θ et $\vec{x}$ un vecteur non nul.
Alors : $\cos\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}|u(\vec{x}))$ et $\sin\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

Réduction des isométries en dimension 3

1. En dimension 3, toute isométrie admet au moins une valeur propre (± 1).
2. Si u est une isométrie directe de E, alors 1 est valeur propre de u et il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et un réel θ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est une matrice de rotation plane.
3. Si u est une isométrie indirecte de E, alors -1 est valeur propre de u et il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ et un réel θ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est une matrice de rotation plane.

Propriétés des rotations

Soit u une isométrie directe différente de l'identité.

1. L'ensemble des vecteurs invariants par u est une droite vectorielle, appelée **axe** de la rotation.
2. L'endomorphisme induit par u sur le plan orthogonal à l'axe est une rotation.
3. Si θ est l'angle de la rotation, alors : $\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.
4. Si $\vec{x}$ est un vecteur non nul orthogonal à l'axe, alors : $\cos\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}(\vec{x}|u(\vec{x}))$ et $\sin\theta = \frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{x}, u(\vec{x}))$, où $\vec{a}$ est un vecteur unitaire dirigeant l'axe.