## Systèmes différentiels linéaires

**Théorème de Cauchy-Lipschitz**
Les fonctions $A$ et $B$ étant continues sur $I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' &= A(t)X + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur $I$.

Savoir utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz avec à propos.

Savoir résoudre un système différentiel linéaire avec $A$ diagonalisable, trigonalisable. Pouvoir exprimer l'ensemble des solutions dans le cas $A$ diagonalisable en fonction des éléments propres. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ selon le cas.

Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants en utilisant une matrice (si possible diagonalisable).

## Séries entières

Définition, exemples simples de séries entières

**Lemme d'Abel** Soit $r$ un réel strictement positif tel que la suite $(a_n r^n)_n$ soit bornée. Alors, pour tout complexe $z$ tel que : $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

On appelle **rayon de convergence** la borne supérieure (réelle ou $+\infty$) de l'ensemble des réels $r$ positifs pour lesquels la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée.
On notera : $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ /$ la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée$\}$. On remarque que cet ensemble est un intervalle de la forme $[0, R]$ ou $[0, R[$.

**Domaine de convergence**

1. Si le rayon de convergence est nul, la série entière est grossièrement divergente pour tout $z \neq 0$.
2. Si le rayon de convergence est infini, la série entière est absolument convergente pour tout $z$.
3. Si $R \in ]0, +\infty[$ , la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z$ tel que $|z| < R$ , et est grossièrement divergente pour tout $z$ tel que : $|z| > R$.

Définitions du disque et de l'intervalle ouvert de convergence. Pas de résultat général concernant la convergence de la série sur la frontière du disque ouvert de convergence.

Soit une fonction $f$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que $f$ est **développable en série entière** s'il existe une suite $(a_n)_n$ et un réel $R > 0$ tel que pour tout $z$ vérifiant $|z| < R$, on a : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

**En pratique**
- Étudier la limite éventuelle de la suite $(|a_n|r^n)_n$.
- Utilisation des critères de comparaison relatifs aux séries à termes positifs.
- Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum \lambda a_n z^n$ $(\lambda \neq 0)$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Utilisation de la règle de d'Alembert.
- Théorème de comparaison/ somme/produit de Cauchy de deux séries entières.
- Détermination de la convergence (ou non) en un point pour obtenir une inégalité concernent le rayon de convegrence.

**Comparaison des rayons de convergence**
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R_a$ et $R_b$.

1. Si : $a_n = O_{+\infty}(b_n)$, alors : $R_a \geq R_b$.
   Ceci est le cas en particulier si : $\forall n, |a_n| \leq |b_n|$.
2. Si $|a_n| \underset{\infty}{\sim} |b_n|$, alors : $R_a = R_b$.

**Somme de deux séries entières**
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R_a$ et $R_b$.
Le rayon de convergence $R$ de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est tel que : $R \geq \min(R_a, R_b)$,
et lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.
Si de plus : $R_a \neq R_b$, alors : $R = \min(R_a, R_b)$.

**Produit de Cauchy de deux séries entières** Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence $R_a$ et $R_b$.

1. Le produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum c_n z^n$, où : $\forall n, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
2. Le rayon de convergence $R$ de la série produit est tel que : $R \geq \min(R_a, R_b)$,
   et lorsque $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$.

## Pour retravailler certains points

**✻$R = sup\{r \in \mathbb{R}^+|a_n r^n)$ est bornée $/\}$. L'ensemble, qu'on note $I$ duquel $R$ est la borne sup est de la forme $[0, R]$ ou $[0, R[$.**

*Démonstration.* On remarque tout d'abord qu'il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$. De plus, si $x > 0$ y appartient, tout nombre positif inférieur à $x$ y est aussi : $I$ est donc un intervalle de $\mathbb{R}^+$, contenant 0.

Soit $r > R$. Par définition de $R$, $r$ ne peut être dans $I$.

Soit $R$ appartient à $I$ (et est un max, et non seulement une borne sup), et alors l'ensemble est l'intervalle $[0, R]$, soit $R$ n'appartient pas à l'ensemble, et par définition de $R$ comme borne sup, et puisque $I$ est un intervalle contenant 0, c'est $[0, R[$. □

**✻Rayon de convergence de $\sum na_n z^n$**

On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum na_n z^n$.

Si les $a_n$ sont tous non nuls et que la suite $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ admet une limite $l$, on observe que la suite $(n > 0)$ $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}$ admet la même limite, ce qui permet de prouver que le rayon de convergence est le même.

Mais si on n'a pas de limite pour cette suite, comment faire ?

On reprend la définition du rayon de convergence : c'est la borne sup des réels $x$ positifs tels que la suite $(|a_n x^n|)$ soit bornée.

Si $R > 0$, soient $x$ et $r$ strictement positifs, tels que $x < r < R$. Alors $|na_n x^n| = |a_n r^n \times (n\frac{x^n}{r^n})|$. Par croissances comparées, $|na_n x^n|$ a pour limite 0, et est donc majorée. Ainsi, $R' \geq R$.

L'autre inégalité se prouve par comparaison de séries entières (par exemple).

Enfin, si $R = 0$, par comparaison de séries entières, et puisque le rayon est un nombre positif, $R' = 0$.