Séries entières

Définition, exemples simples de séries entières.

Savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière (utilisation d'équivalents, de majoration, preuve de divergence de la série en un point bien choisi, expression de la série comme comme de deux séries entières, primitive ou dérivée d'une série entière).

Savoir déterminer l'expression d'une série entière en se ramenant à des séries entières usuelles (somme, produit de Cauchy, primitive, dérivée...)

Savoir développer une fonction en série entière, en donner le rayon de convergence.

Les développements en série entière des fonctions usuelles doivent être connus.

Convergence normale
Une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]-R, R[$ et sur tout disque fermé de centre O de rayon $r < R$.

Continuité de la somme
La somme d'une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ est continue sur son domaine ouvert de convergence.

Intégration terme à terme
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Dérivation terme à terme
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sa somme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et on peut dériver terme à terme, les séries dérivées ayant toutes le même rayon de convergence :

$$\forall x \in]-R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-R, R[, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}$$

Unicité du développement en série entière Soit une fonction f développable en série entière. Les coefficients du développement sont définis de manière unique par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Si une série entière est nulle au voisinage de 0, alors tous ses coefficients sont nuls. Si deux séries entières sont égales au voisinage de 0, elles ont les mêmes coefficients. Si la somme d'une série entière est impaire, ses coefficients pairs sont nuls.

Série de Taylor en 0
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On appelle **série de Taylor en 0** de f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Développement en série entière et série de Taylor
f est développable en série entière si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et s'il existe un intervalle non vide $]-R, R[$ sur lequel sa série de Taylor en 0 converge et a pour somme $f(x)$:

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Dans le cas des séries entières de rayon >0, l'inégalité de Taylor - Lagrange en 0 peut montrer la convergence en un point donné. :
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et dont la dérivée d'ordre $n+1$ est bornée. On pose : $M_{n+1} = \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$.
Alors : $\forall (a, x) \in I^2, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
On choisit $a = 0$, et x dans le disque ouvert de convergence, la série entière est bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle contenant 0, et alors il existe M_{n+1} majorant la dérivée de la série d'ordre $n+1$, et :

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k \right| \leq M_{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$