La connaissance parfaite des démonstrations des théorèmes n'est pas attendue, mais il faut savoir qu'elles se basent sur le théorème de convergence dominée (qui doit être connu) et en comprendre la ligne directrice.

Intégrales paramétrées

I et J désignent deux intervalles quelconques de $\mathbb{R}$ (non vides et non réduits à un point).

Continuité d'une intégrale paramétrée

On suppose que f vérifie les trois hypothèses suivantes :

- ⋆ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- ⋆ Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- ⋆ f vérifie l'**hypothèse de domination** :
  il existe une fonction ϕ, indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que : $\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \phi(t)$.

Alors

- ⋆ pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J;
- ⋆ la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\ dt$ est continue sur I.

Savoir remplacer l'hypothèse de domination globale par une hypothèse de domination locale judicieusement choisie.

Dérivabilité d'une intégrale paramétrée

On suppose que f vérifie les quatre hypothèses suivantes :

- ⋆ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
- ⋆ Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- ⋆ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- ⋆ $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination globale ou locale.

Alors, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur J, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt.$$

(formule de Leibniz).

Généraliser aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.