Probabilités

Connaître les lois uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson. Savoir en calculer l'espérance, la variance, et le fonction génératrice. Savoir retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire en en connaissant la fonction génératrice.

Connaître les propriétés de l'espérance et de la variance. Savoir utiliser l'indépendance de variables deux-à-deux indépendantes.

Savoir retrouver la variance d'une somme finie de v.a., en fonction des variances des v.a. et des covariances des couples de v.a.

Savoir retrouver une loi marginale connaissant une loi conjointe.

Les théorèmes suivants sont à connaître, avec leur démonstration :

Somme de deux variables de Poisson indépendantes
Soient X et Y 2 v.a indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre λ et μ.
Alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Fonction génératrice d'une somme de 2 v.a. indépendantes
Soient X et Y 2 v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. La série génératrice de $X+Y$ est égale au produit de Cauchy des séries génératrices de X et de Y.
Si $|t|$ est strictement inférieur au plus petit des deux rayons de convergence, on a donc :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Si on connaît G_X et G_Y, le développement en série entière de leur produit peut alors permettre de déterminer la loi de $X+Y$.

Inégalité de Markov Soit X une v.a. réelle discrète positive ayant une espérance finie. On a alors :

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une v.a. réelle discrète ayant une variance finie. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Loi Faible des Grands Nombres
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. 2 à 2 indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance commune et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Plus précisément, en notant σ l'écart-type commun, on a : $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

Espaces vectoriels normés Définitions : Norme, boules (ouvertes et fermées), sphères. Propriétés d'une distance, inégalités triangulaires.

Connaître les normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$, sur les matrices à coefficients réels et complexes, sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Savoir montrer pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n||x||_\infty$.

Convergence dans un e.v.n.

1. Soit u une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que la suite u **converge** vers l lorsque la suite numérique $(||u_n - l||)_n$ converge vers 0.
2. Si une suite u converge dans $(E, || \, ||)$, sa limite l est définie de manière unique. On peut alors utiliser la notation : $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. Toute suite convergente est bornée.
4. Si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(||u_n||)_n$ converge vers $||l||$.
5. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E et $(\lambda_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.
   (a) Si $(u_n)_n$ est bornée et $(\lambda_n)_n$ tend vers 0, alors : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \vec{0}$.
   (b) Si $(u_n)_n$ tend vers $\vec{0}$ et $(\lambda_n)_n$ est bornée , alors : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \vec{0}$.
6. L'ensemble des suites convergentes d'éléments de E est un espace vectoriel et l'application qui, à une suite convergente, associe sa limite est linéaire.

Savoir utiliser les quantificateurs (avec ε ou $\mathcal{B}(l,\varepsilon)$) pour prouver une convergence.

Connaître la définition des suites extraites et savoir les utiliser.

[Preuve non exigible] Dans un espace vectoriel E de dimension finie, la notion de limite d'une suite est indépendante du choix de la norme dans E.

Connaître un contre-exemple en dimension quelconque.

Utilisation des suites coordonnées pour montrer la convergence d'une suite (ou non).

Définitions : E est de dim. finie. Soit A une partie de l'espace vectoriel normé $(E, ||, ||)$.

1. Un élément a de E est un **point adhérent** à A lorsque toute boule ouverte centrée en a rencontre A : $\forall r > 0, \mathcal{B}(a,r) \cap A \neq \emptyset$.
2. L'**adhérence** de A est l'ensemble des points adhérents à A, noté : $\overline{A}$ ou $\mathrm{Adh}(A)$.
3. A est une **partie fermée** lorsque tout point adhérent à A appartient à A.

Caractérisations séquentielles d'un point adhérent et d'une partie fermée Soit A une partie de E et a un élément de E.

1. a est un point adhérent à A <u>si et seulement si</u> il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
2. A est une partie fermée de E <u>si et seulement si</u> toute suite convergente d'éléments de A a pour limite un élément de A.