I. Fonctions continues intégrables

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Définition 1 (Fonction continue intégrable sur un intervalle réel qcq).

Etant donnés I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$,
on dit que la fonction continue f est continue **intégrable sur I** lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x\to\alpha^+,\ y\to\beta^-} \int_x^y |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

Proposition 1.

Soit f continue sur $]\alpha, \beta[$.
Si f est intégable sur I, alors la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x\to\alpha^+,\ y\to\beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t \in \mathbb{K}$$

Définition 2 (Nature de l'intégrale généralisée d'une fonction continue).

Etant donnés I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$,
on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur I **converge** lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x\to\alpha^+,\ y\to\beta^-} \int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t$$

En cas de convergence, on note $\boxed{\int_\alpha^\beta f}$ ou $\boxed{\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t}$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque 1. Pour $f : I \to \mathbb{R}^+$ continue, l'intégrabilité sur I est équivalente à la convergence de l'intégrale généralisée de f sur I.

Remarque 2. Pour $f : I \to \mathbb{C}$ continue, l'intégrabilité sur I implique à la convergence de l'intégrale généralisée de f sur I.

Notation : $\mathcal{C}^0L^1(I, \mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues intégrables définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

exemple 1. $\int_1^B \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(B) \xrightarrow[B\to+\infty]{} +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

exemple 2. $\int_1^B \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{-1}{B} + 1 \xrightarrow[B\to+\infty]{} 1$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge et vaut 1.

exemple 3. $\int_A^1 \ln(t)\mathrm{d}t \underset{IPP}{=} 1\ln 1 - 1 - A\ln A + A \xrightarrow[A\to 0]{} -1$, donc $\int_1^{+\infty} \ln t$ converge et vaut -1.

Intégrales généralisées de référence :

Proposition 2 (Intégrales de Riemann).

Soit α un réel.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\alpha > 1}$.
De plus, on a : $\forall \alpha > 1,\ \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Proposition 3 (exponentielles).

Soit β un réel.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\boxed{\beta > 0}$.
De plus, on a : $\forall \beta > 0,\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}$.

Proposition 4 (critère d'intégrabilité pour une fonction positive sur I).

Etant donnés I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^+)$ **à valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si :

$$\exists M > 0;\ \forall x, y \in I,\ \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq M.$$

Théorème 5 (de comparaison).

Soient $I = [a, b[$ un intervalle réel, $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable sur I et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq |g(t)|$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
2. Si g est intégrable sur I et si : $|f(t)| \underset{t \to b^-}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.
3. Si g est intégrable sur I et si : $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

exemple 4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, car $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et vérifie $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$, par comparaison avec $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ continue intégrable (Riemann)