Banque PT Maths C 2019 Correction

Préambule

1. La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$, car la fonction inverse l'est et arctangente l'est sur $\mathbb{R}$ (composée et somme de fonctions dérivables).
$\forall x>0, h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0.$
On en déduit que h est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. La valeur prise par h est $2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour tout réel t de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos t=\cos\left(2\dfrac{t}{2}\right)=2\cos^2\dfrac{t}{2}-1$.

   (b) Pour tout réel t de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{t}{2}\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, donc $\tan\dfrac{t}{2}$ est bien définie.

   $$\frac{1}{1+\tan^2\frac{t}{2}}=\frac{1}{\dfrac{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}}=\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{1}=\cos^2\frac{t}{2}.$$

   (c) Pour tout réel t de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $u=\tan\dfrac{t}{2}$.

   Par (a) et (b), $\cos t=2\cos^2\dfrac{t}{2}-1=\dfrac{2}{1+u^2}-1=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin^n(x)dx.$$

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto e^{-x}\sin^n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.
   $\forall x\geqslant 0$, $|e^{-x}\sin^n(x)|\leqslant e^{-x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$ converge (intégrale de référence).
   Donc par majoration, fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}|e^{-x}\sin^n(x)|dx$ converge.
   Ainsi, fonction intégrable, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

   (b) $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=[-e^{-x}]_0^{+\infty}=1.$

   (c) Soit $X\in\mathbb{R}^+$. La fonction $x\mapsto e^{-x}\cos(x)$ est continue sur $[0,X]$ et
   $\displaystyle\int_0^X e^{-x}\cos(x)dx=Re\left(\int_0^X e^{-x}e^{ix}dx\right)=Re\left(\left[\frac{e^{(i-1)x}}{i-1}\right]_0^X\right)=Re\left(\frac{-i-1}{2}(e^{-X}(\cos(X)+i\sin(X))-1)\right).$
   $\displaystyle\int_0^X e^{-x}\cos(x)dx=\frac{1}{2}e^{-X}(\sin(X)-\cos(X))+\frac{1}{2}$
   Une primitive de la fonction, qui a tout réel positif x, associe : $e^{-x}\cos(x)$ est donc $x\mapsto\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin(x)-\cos(x))$.

   (d) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Les fonctions $x\mapsto -e^{-x}$ et $x\mapsto\sin^n(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$\lim_{x\to+\infty} -e^{-x}\sin^n(x)=0$, donc d'après le théorème d'intégration par parties appliqué aux intégrales généralisées, I_n et $-n\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx$ sont de même nature, donc convergentes.

De plus $I_n=\lim_{B\to+\infty}[-e^{-x}\sin^n(x)]_0^B+n\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx=n\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx$.

Les fonctions $x\mapsto \frac{1}{2}e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))$ et $x\mapsto\sin^{n-1}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$\lim_{x\to+\infty} -e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\sin^{n-1}(x)=0$, donc d'après le théorème d'intégration par parties appliqué aux intégrales généralisées, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx$ et $\frac{1}{2}(n-1)\int_0^{+\infty} e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\cos(x)\sin^{n-2}(x)dx$ sont de même nature, donc convergentes.

Or $(-\cos(x)+\sin(x))\cos(x)\sin^{n-2}=\cos(x)\sin^{n-1}(x)-\cos^2(x)\sin^{n-2}=\cos(x)\sin^{n-1}(x)+\sin^n(x)-\sin^{n-2}(x)$.

Toutes les intégrales généralisées utilisées ici étant convergentes, on a :

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx=\frac{1}{2}[e^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\sin^{n-1}(x)]_0^{+\infty}-\frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx-\frac{n-1}{2}I_n+\frac{n-1}{2}I_{n-2}$.

On en déduit que $\frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)dx=-\frac{n-1}{2}I_n+\frac{n-1}{2}I_{n-2}$.

Ainsi, $(n+1)I_n=-n(n-1)I_n+n(n-1)I_{n-2}$, d'où $(n^2+1)I_n=n(n-1)I_{n-2}$ et $I_n=\frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}$.

(e) En exploitant la relation de récurrence au niveau des premiers termes ($I_0=1$) et des derniers termes, on conjecture que $I_{2n}=\frac{(2n)!}{\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)}$ et on prouve ce résultat par récurrence.

La relation est vraie pour $n=0$. Si on la suppose vraie au rang n, on obtient au rang $n+1$:

$$I_{2n+2}=\frac{2n(2n-1)}{(2n+2)^2+1}I_{2n}=\frac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(4(n+1)^2+1)\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)}=\frac{(2n+2)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(4k^2+1)}.$$

La récurrence est établie et $\forall n\in\mathbb{N}, I_{2n}=\frac{(2n)!}{\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)}$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}=\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{4n^2}}$. C'est un quotient de nombres strictement positifs, donc

$u_n=\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)$.

$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n}$. Or série de Riemann de référence, $\alpha=1$, $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi, théorème d'équivalence, séries à termes négatifs à partir d'un certain rang, $\sum u_n$ diverge.

(b) Soit $n\in N^*$, $\ln I_{2n}=\ln\left(\frac{(2n)!}{\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)}\right)=\ln(\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k-1))-\ln(\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1))$.

$\ln I_{2n}=\ln(\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k-1))-\ln(\prod_{k=1}^{n}(4k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}\ln(2k(2k-1)-\ln(4k^2+1)=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

(c) La suite de terme général $\sum u_k$ diverge et sa limite est $-\infty$, puis c'est la suite des sommes partielles d'une série divergente, à termes négatifs à partir d'un certain rang.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty}\ln(I_{2n})=-\infty$. Par composition par la fonction exponentielle, on en déduit que (I_{2n}) converge vers 0.