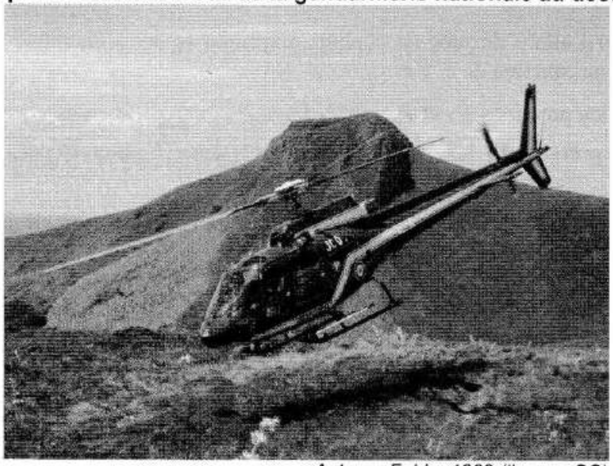
Problème n°1 : Un écureuil au plafond

MOTS-CLES : relation de Bernoulli, système ouvert, statique des fluides.

Le record mondial pour un atterrissage et un décollage en altitude par hélicoptère fut remporté en 2005 lorsqu'un Ecureuil AS350 B3 se posa au sommet de l'Everest à 8 850 m d'altitude. On se propose de modéliser la force de portance exercée sur cet hélicoptère et d'évaluer son altitude maximale (appelée *plafond*) à partir des caractéristiques de l'appareil.

Hélicoptère Ecureuil AS350 de la gendarmerie nationale au décollage

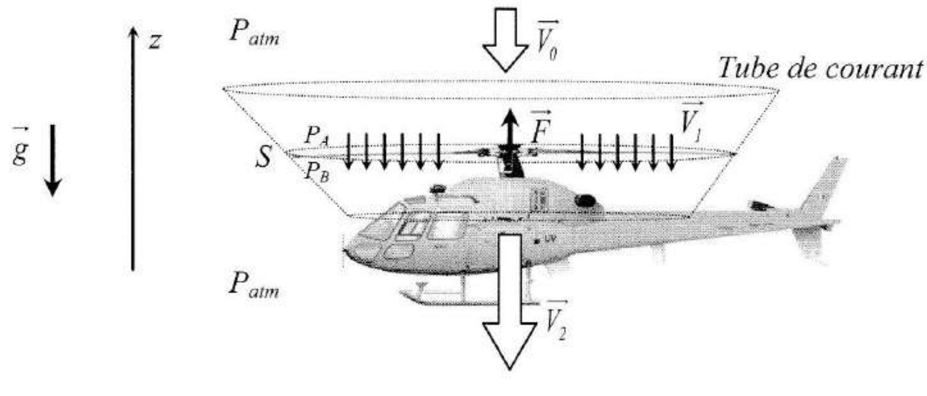


Auteur : Fabien1309 (licence CC)

Le moteur de l'hélicoptère Ecureuil AS350 B3 fournit une puissance mécanique totale de 847 ch (623 kW). Le rotor, constitué de trois pales, a un diamètre de 10,7 m. La masse totale de l'appareil, avec ses passagers et le matériel, vaut 1 500 kg.

Les pales du rotor sont inclinées pour entraîner l'air vers le bas et maintenir l'appareil en vol stationnaire ou en vol ascendant. On considère l'écoulement d'air provoqué par le rotor dans le tube de courant représenté sur le schéma ci-dessous.

Ecoulement d'air dans le tube de courant passant par le rotor de l'hélicoptère



Le rotor balaye une surface totale S. L'air est en écoulement incompressible, de la vitesse V_0 à l'entrée du tube de courant à la vitesse V_2 en sortie, vitesses mesurées dans le référentiel lié à l'appareil. La vitesse de l'air au voisinage du rotor vaut V_1. La pression à l'extérieur du tube de courant est la pression atmosphérique P_{atm}, uniforme à l'échelle de l'hélicoptère. On note P_A et P_B les pressions juste au-dessus et juste en dessous du rotor. L'écoulement est supposé parfait partout, sauf au voisinage des pales où les forces de viscosité jouent un rôle non négligeable. On néglige l'influence de la pesanteur sur l'écoulement et on note ρ la masse volumique de l'air, assimilé à un gaz parfait de température uniforme $T_0 = 273$ K. La pression P_0 au niveau de la mer vaut $1{,}0.10^5$ Pa. Le champ de pesanteur est uniforme d'intensité $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

1) Justifier l'allure du tube de courant. Exprimer le débit massique de l'air dans le tube de courant en fonction de ρ, S et V_1.

2) Relier les pressions P_A et P_{atm}, puis P_B et P_{atm} aux différentes vitesses. En déduire la différence de pression $P_B - P_A$, puis la force de portance $\overrightarrow{F}$ exercée par l'air sur le rotor. Commenter.

3) Déduire d'un bilan de quantité de mouvement l'expression de la vitesse V_1 en fonction de V_0 et V_2.

4) Exprimer alors directement la puissance mécanique P transférée par le rotor à l'air.

5) Retrouver l'expression de cette puissance à l'aide d'un bilan thermodynamique.

On considère dans un premier temps un vol ascendant à la vitesse constante V par rapport au sol, comme lors d'un décollage.

6) Exprimer les vitesses V_0, V_1 et V_2 en fonction de V et des données. En déduire la puissance du rotor nécessaire pour maintenir cette vitesse d'ascension.

L'Ecureuil AS350 B3 a également remporté en 2005 des records de vitesse ascensionnelle :		
3 000 m en 2 min 21 s	6 000 m en 5 min 06 s	9 000 m en 9 min 26 s

7) Evaluer la vitesse ascensionnelle atteinte en fonction de l'altitude. Commenter.

8) Déterminer la puissance maximale transférée par le rotor à l'air au niveau du sol. Comparer à la puissance mécanique totale délivrée par le moteur de l'hélicoptère. Définir et évaluer le rendement du moteur au niveau du sol. Commenter le résultat.

La masse volumique de l'air, notée à présent $\rho(z)$, varie avec l'altitude z, ce qui diminue l'efficacité du moteur. Au voisinage du plafond, la puissance maximale du rotor ne vaut plus que 60 % de sa puissance maximale au niveau de la mer, rendant très difficile un vol stationnaire à cette altitude.

9) Exprimer la puissance maximale du rotor nécessaire pour un vol stationnaire à l'altitude z.

10) Retrouver l'expression de la masse volumique de l'air $\rho(z)$ en fonction de l'altitude dans le modèle de l'atmosphère isotherme. On introduira une hauteur H caractéristique dont on donnera la valeur numérique.

11) Déterminer l'altitude maximale z_{max} qu'il est possible d'atteindre avec cet hélicoptère. Commenter.

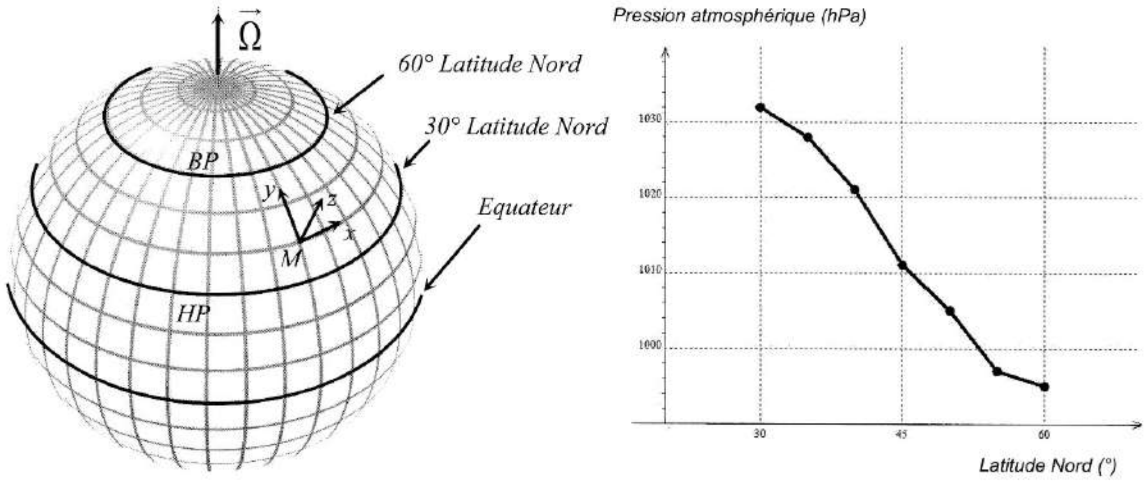
Le record absolu d'altitude en hélicoptère est détenu par un Lama SA 315 B Eurocopter qui a atteint l'altitude maximale de 12 442 m.

<u>Problème n°2</u> : Origine du jet stream

MOTS-CLES : force d'inertie de Coriolis, équation d'Euler, statique des fluides.

On peut comprendre l'origine du jet stream (voir problème 4.9) en étudiant le rôle de la force de Coriolis dans la formation du vent à l'échelle de la planète. Ce mouvement global des masses d'air, appelé vent géostrophique, est dû à la variation spatiale de pression atmosphérique combinée à la rotation de la Terre.

Evolution de la pression atmosphérique moyenne en fonction de la latitude dans l'hémisphère Nord



La pression atmosphérique moyenne varie selon la latitude : on constate, dans l'hémisphère Nord, que la pression au sol au voisinage de 30° de latitude Nord est en général plus élevée qu'au voisinage de 60° de latitude Nord, induisant un gradient horizontal de pression dans la zone intermédiaire. On se propose de déterminer les caractéristiques du vent géostrophique dans cette région.

On associe à tout point M de latitude λ un repère cartésien d'axes $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, comme indiqué sur le schéma ci-dessus. La direction $\overrightarrow{e_z}$ est assimilée à la verticale locale, définie par le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$, localement uniforme. On considère une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse volumique ρ située en M en mouvement dans le référentiel terrestre. On néglige tout effet de la viscosité. La Terre, de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km, tourne à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

1) Représenter les lignes isobares au sol dans la zone étudiée (entre 30° de latitude Nord et 60° de latitude Nord). Comment est dirigé le gradient horizontal de pression ? En déduire le mouvement attendu des particules de fluide en l'absence de rotation de la Terre.

2) Montrer que l'équation du mouvement d'une particule de fluide de vitesse $\vec{v}$ peut se mettre sous la forme, dans le référentiel terrestre :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P - 2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$$

où $P(x,y,z)$ est le champ de pression dans l'atmosphère.

Identifier les différents termes, en particulier les termes d'inertie. Quel est l'effet de la force de Coriolis sur le mouvement des particules de fluide ?

3) Que devient l'équation du mouvement dans le cas d'une atmosphère au repos à la température $T_0 = 288$ K ? En déduire le champ de pression $P_{repos}(x,y,z)$ dans ce modèle d'atmosphère isotherme et évaluer l'épaisseur H de l'atmosphère. On pourra assimiler l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29.10^{-3}$ kg.mol^{-1}. Comparer H au rayon R_T de la Terre. Commenter.

On pose dans la suite $p(x,y,z) = P(x,y,z) - P_{repos}(x,y,z)$ et on recherche une solution sous la forme d'un écoulement stationnaire. Afin d'évaluer l'influence du terme de Coriolis dans le mouvement des particules de fluides, on définit le *Nombre de Rossby*, noté R_o, du nom du météorologue suédois Carl-Gustaf Rossby, comme le rapport du terme de convection sur le terme de Coriolis dans l'équation du mouvement.

4) En travaillant en ordre de grandeur, déterminer l'expression du nombre de Rossby R_o pour un écoulement de vitesse caractéristique U et de taille caractéristique L.

5) Evaluer numériquement R_o pour un écoulement correspondant à la vidange d'une baignoire d'une part, et pour un écoulement de masses d'air atmosphérique d'autre part. Commenter.

6) Simplifier l'équation du mouvement en conséquence et déterminer la relation liant $\vec{v}$ et $\overrightarrow{grad}\,p$.

7) Comment est dirigé le vent géostrophique dans l'hémisphère Nord ? Comparer à la direction des lignes isobares. Le profil de pression étant symétrique dans l'hémisphère Sud, déterminer la direction et le sens du vent géostrophique dans l'hémisphère Sud. Commenter.

8) En projetant la relation précédente sur $\overrightarrow{e_y}$, exprimer la composante v_x de la vitesse en fonction de ρ, Ω, λ et $\dfrac{dp}{dy}$. En déduire une estimation numérique de la vitesse du vent géostrophique pour la latitude $\lambda = 45°$. Conclure.