Problème n°1

1) L'écoulement étant incompressible (la vitesse du fluide est très faible devant la vitesse du son dans l'air), il y a conservation du débit volumique. Le rotor permet d'augmenter la vitesse de l'air si bien que $V_2 > V_0$, ce qui implique alors que $S_2 < S_0$. La section du tube de courant est donc plus faible en aval de l'écoulement qu'en amont, justifiant le schéma proposé.
En régime stationnaire, le débit massique est le même à travers toute section du tube de courant. Celui-ci peut s'exprimer par la relation :

$$\boxed{D_m = \rho S V_1}$$

2) La viscosité ne peut pas être négligée près du rotor, c'est-à-dire entre les points A (juste au-dessus du rotor) et B (juste en dessous). On peut cependant supposer que l'écoulement est parfait entre le point A_0 en amont et le point A d'une part, et le point B et le point B_0 en aval d'autre part. L'écoulement est en outre stationnaire, incompressible et homogène. On applique alors la deuxième relation de Bernoulli sur chaque ligne de courant (le long de l'axe du tube de courant), en négligeant la différence d'altitude entre les points :

entre A_0 et A : $$\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_1^2}{2}$$

entre B et B_0 : $$\frac{P_B}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2}{2}$$

On en déduit la différence de pression :

$$\boxed{P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_0^2\right)}$$

La force de portance exercée par l'air sur le rotor s'exprime alors par :

$$\boxed{\vec{F} = (P_B - P_A) S\,\vec{e_z} = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_0^2\right) S\,\vec{e_z}}$$

Avec $V_2 > V_0$, on a $P_B > P_A$ et la force de portance est dirigée vers le haut, permettant à l'hélicoptère de voler !

3) On effectue un bilan de quantité de mouvement pour une quantité de fluide dans le tube de courant que l'on suit entre t et $t + dt$:

Quantité de mouvement à l'instant t : $\vec{p}(t) = \vec{p_0}(t) + D_m dt \vec{V_0}$

Quantité de mouvement à l'instant $t + dt$: $\vec{p}(t+dt) = \vec{p_0}(t+dt) + D_m dt \vec{V_2}$

d'où la variation de quantité de mouvement du fluide, en remarquant qu'en régime stationnaire la quantité de mouvement dans le volume commun $\vec{p_0}$ ne dépend pas du temps :

$$d\vec{p} = D_m\left(\vec{V_2} - \vec{V_0}\right)dt$$

On applique alors le théorème de la résultante cinétique à l'air dans le tube de courant à l'instant t. Le système est soumis aux forces de pression atmosphérique qui s'exercent sur toute la surface du tube de courant, à son poids et à la force exercée par le rotor sur l'air (qui n'est autre que $-\vec{F}$). En négligeant la pesanteur sur l'écoulement, il reste (les forces de pression atmosphérique se compensant complètement) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{rotor\rightarrow air} = -\vec{F}$$

d'où :

$$D_m\left(\vec{V_2} - \vec{V_0}\right) = -\frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_0^2\right) S\,\vec{e_z}$$

C'est-à-dire, en projection sur $\vec{e_z}$:

$$D_m\left(-V_2 + V_0\right) = -\frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V_0^2\right) S$$

En remarquant que $D_m = \rho S V_1$, on en déduit simplement l'expression de V_1 :

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2}}$$

4) La puissance mécanique reçue par l'air est due à la force exercée sur l'air par le rotor $\vec{F}_{rotor\rightarrow air}$ qui met l'air en mouvement à la vitesse $\vec{V_1}$:

$$P = \vec{F}_{rotor\rightarrow air}.\vec{V_1} = -\vec{F}.\vec{V_1}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{P = \frac{1}{4}\rho S\left(V_2 + V_0\right)\left(V_2^2 - V_0^2\right)}$$

5) Le premier principe appliqué à l'air en écoulement unidimensionnel stationnaire dans le tube de courant s'écrit, en négligeant la pesanteur :

$$D_m\left(h_2 - h_0 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right) = P_{th} + P_{méca}$$

L'évolution de l'air est supposée adiabatique (les échanges thermiques n'ont pas le temps de se faire avec l'extérieur) et on néglige l'élévation de la température de l'air au passage du rotor (l'enthalpie du gaz parfait reste alors inchangée), si bien qu'il reste :

$$P_{méca} = D_m\left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{P = P_{méca} = \frac{1}{4}\rho S\left(V_2 + V_0\right)\left(V_2^2 - V_0^2\right)}$$

Le bilan thermodynamique nous conduit au même résultat que précédemment.

6) Les vitesses de l'air étant mesurées dans le référentiel de l'hélicoptère, l'air en amont a une vitesse :

$$\boxed{V_0 = +V}$$

Pendant la phase ascensionnelle à vitesse constante, la force de portance compense uniquement le poids de l'appareil et de ses passagers :

$$\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

d'où, en projection sur $\vec{e_z}$:

$$F = \frac{1}{2}\rho\left(V_2^2 - V^2\right) S = mg$$

On en déduit :

$$\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S} + V^2}}$$

Enfin, on obtient la vitesse V_1 :

$$V_1 = \frac{V_0 + V_2}{2}\text{, c'est-à-dire : }\boxed{V_1 = \frac{1}{2}\left(V + \sqrt{\frac{2mg}{\rho S} + V^2}\right)}$$

La puissance du rotor vaut alors :

$$P = mgV_1\text{, c'est-à-dire : }\boxed{P = \frac{mg}{2}\left(V + \sqrt{\frac{2mg}{\rho S} + V^2}\right)}$$

7) On constate qu'il faut de plus en plus de temps pour que l'hélicoptère monte en altitude. On estime ainsi la vitesse ascensionnelle moyenne aux altitudes intermédiaires 1 500 m, 4 500 m et 7 500 m en calculant le temps mis pour monter de 3 000 m à chaque fois :

Altitude	1 500 m	4 500 m	7 500 m
Vitesse moyenne	21,3 m.s^{-1}	18,2 m.s^{-1}	11,5 m.s^{-1}

La vitesse ascensionnelle diminue à mesure que l'on monte. La diminution de la densité de l'air avec l'altitude rend en effet le rotor moins efficace pour porter l'appareil. D'autre part, la raréfaction de l'oxygène diminue le rendement du moteur.

8) Au niveau du sol, on peut considérer la vitesse de décollage maximale $V = 21{,}3$ m.s^{-1} (puisque c'est un record de vitesse ascensionnelle). La puissance mécanique maximale utile délivrée par le rotor vaut alors :

$$\boxed{P = \frac{mg}{2}\left(V + \sqrt{\frac{2mg}{\rho S} + V^2}\right) = 352\ \text{kW}}$$

On aura calculé la masse volumique ρ en considérant l'air comme un gaz parfait :

$$\rho = \frac{MP_0}{RT_0} = 1{,}3\ \text{kg.m}^{-3}$$

Cette puissance mécanique est inférieure à la puissance annoncée de 623 kW. Il faut en effet tenir compte des frottements de l'air sur les pales du rotor qui consomment une partie non négligeable de la puissance du moteur. Le moteur principal alimente également tout l'appareil en énergie et ainsi que le rotor de queue. Le rendement du moteur est le rapport de la puissance mécanique utile sur la puissance dépensée, c'est-à-dire :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{utile}}{P_{consommée}} = \frac{352}{623} = 56{,}5\ \%}$$

Près de 45 % de la puissance totale délivrée par le moteur ne sert pas directement à la propulsion de l'appareil.

9) Pour un vol stationnaire, l'air en amont de l'appareil est cette fois au repos : $V = 0$. La puissance nécessaire pour un vol stationnaire à l'altitude z vaut dans ce cas :

$$\boxed{P = \frac{(mg)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\rho(z)S}}}$$

10) Dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme, l'équilibre d'une particule de fluide impose :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \text{ avec } \rho = \frac{Mp}{RT_0}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dz} + \frac{Mg}{RT_0} p = 0$$

On intègre cette équation en posant $p(0) = P_0$:

$$p(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \text{ où } \boxed{H = \frac{RT_0}{Mg} = 8,0.10^3 \text{ m}}$$

On en déduit la masse volumique à l'altitude z :

$$\boxed{\rho(z) = \frac{MP_0}{RT_0} e^{-\frac{z}{H}}}$$

11) A cette altitude, la puissance mécanique maximale vaut $P_{max} = 211$ kW. On en déduit la masse volumique par la relation :

$$\rho(z) = \frac{(mg)^3}{2SP_{\max}} = 0,40 \text{ kg.m}^{-3}$$

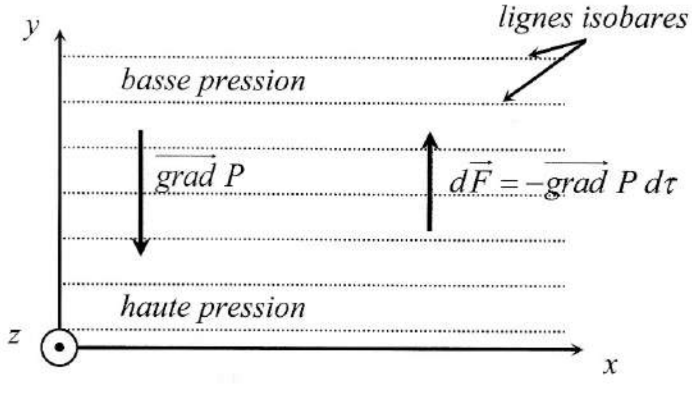
L'altitude maximale vaut alors :

$$z_{\max} = H \ln\left(\frac{\rho(0)}{\rho(z)}\right), \text{ soit numériquement : } \boxed{z_{\max} = 9,4 \text{ km}}$$

On retrouve tout à fait le bon ordre de grandeur pour un record d'altitude en hélicoptère !

Problème n°2

1) La pression varie selon la latitude. On peut ainsi représenter localement les lignes isobares comme des droites parallèles à $\overrightarrow{e_x}$. Le gradient horizontal de pression est dirigé des faibles pressions vers les hautes pressions, c'est-à-dire dans l'hémisphère Nord du Nord vers le Sud (selon $-\overrightarrow{e_y}$). Les particules de fluide de volume $d\tau$ subissent alors la résultante des forces de pression $d\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, P\, d\tau$, dirigée selon $+\overrightarrow{e_y}$, comme représentée sur le schéma ci-dessous :



2) On applique l'équation d'Euler à une particule de fluide dans le référentiel terrestre non galiléen :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right)=\rho\vec{G}-\overrightarrow{grad}P+\overrightarrow{f_{ie}}+\overrightarrow{f_{ic}}$$

où $\vec{G}$ est le champ local de gravitation exercé par la Terre et $\overrightarrow{f_{ie}}$ et $\overrightarrow{f_{ic}}$ sont les forces volumiques d'inertie d'entraînement et de Coriolis, c'est-à-dire :

- pour la force volumique d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{f_{ie}}=-\rho\overrightarrow{a_e}$
- pour la force volumique d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{f_{ie}}=-\rho\overrightarrow{a_c}=-2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$

La force d'inertie d'entraînement est la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même. On la rassemble généralement avec la force de gravitation pour former le poids : $\rho\left(\vec{G}-\overrightarrow{a_e}\right)d\tau=\rho\vec{g}d\tau$, où $\vec{g}$ est le champ local de pesanteur.

On obtient finalement :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\overrightarrow{grad}P-2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}}$$

La force d'inertie de Coriolis rajoute un terme dans l'équation d'Euler qui va dévier les particules de fluide. C'est cette force de Coriolis qui explique les enroulements des masses d'air autour des dépressions et des anticyclones, et qui explique aussi en partie la formation des ouragans.

3) Pour l'atmosphère au repos, l'équation d'Euler devient :

$$\vec{0}=\rho\vec{g}-\overrightarrow{grad}P_{repos}\text{, soit en projection sur }\overrightarrow{e_z}\ :\ dP_{repos}=-\rho g dz$$

Or pour un gaz parfait, la masse volumique dépend de la pression : $\rho=\dfrac{MP_{repos}}{RT_0}$. On aboutit alors à l'équation différentielle :

$$\frac{dP_{repos}}{dz}+\frac{Mg}{RT_0}P_{repos}=0$$

On intègre entre $z = 0$ et z, pour obtenir le champ de pression dans l'atmosphère :

$$\boxed{P_{repos}(x,y,z)=P_0\,e^{-\frac{z}{H}}}\text{ avec }\boxed{H=\frac{RT_0}{Mg}=8{,}4\text{ km}}$$

La hauteur H de l'atmosphère est telle que $H << R_T$, c'est une couche très fine qui entoure notre planète.

4) Par définition du nombre de Rossby : $R_o=\dfrac{\left\|\rho\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}\right\|}$, c'est-à-dire, en ordre de grandeur : $R_o=\dfrac{\rho\frac{U^2}{L}}{2\rho\Omega U}$, soit encore : $\boxed{R_o=\dfrac{U}{2L\Omega}}$.

5) La vitesse de rotation de la Terre vaut : $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7,27.10^{-5}$ rad.s^{-1}

- Pour la vidange d'une baignoire, on considère : L = 1 m et U = 1 m.s^{-1}, ce qui donne un nombre de Rossby $R_o = 7.10^3 >> 1$
- Pour l'écoulement d'air atmosphérique : $L = 10^3$ km et U = 50 km/h, d'où un nombre de Rossby $R_o = 0,1 << 1$

Dans le cas de la vidange de la baignoire, l'écoulement est dominé par la convection et, contrairement aux idées reçues, la force de Coriolis est parfaitement négligeable et n'est pas la cause de la mise en rotation de l'eau. En revanche, dans un écoulement d'air atmosphérique, la force de Coriolis l'emporte sur la convection !

6) On se place en régime stationnaire $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. Avec $R_o << 1$, l'équation d'Euler se simplifie en :

$$\vec{0} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

On introduit la pression de l'atmosphère au repos $P(x,y,z) = p(x,y,z) + P_{repos}(x,y,z)$:

$$\vec{0} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}p - \overrightarrow{grad}P_{repos} - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

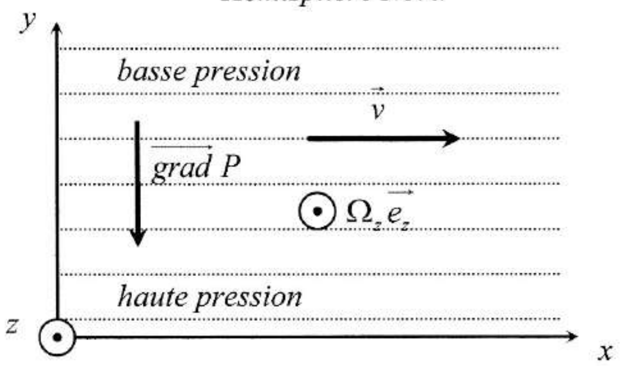
On a vu précédemment que pour l'atmosphère au repos : $\vec{0} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P_{repos}$.

Il reste finalement :

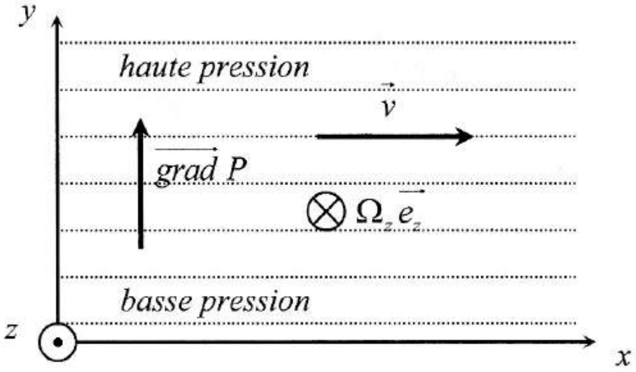
$$\boxed{\vec{0} = -\overrightarrow{grad}p - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}}$$

7) Avec l'égalité : $2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -\overrightarrow{grad}p$, on constate que le vent géostrophique est cette fois orthogonal au gradient de pression : <u>le vent géostrophique souffle le long des lignes isobares</u>. On peut préciser le sens de déplacement selon que l'on soit dans l'hémisphère Nord ou l'hémisphère Sud :

Hémisphère Nord



Hémisphère Sud



Le vent géostrophique est dirigé dans le même sens, que l'on soit dans l'hémisphère Nord ou l'hémisphère Sud, ce qui explique le schéma des vents à l'échelle de la Terre présenté dans le document sur le courant-jet.

8) La vitesse de rotation de la Terre admet une composante selon $\overrightarrow{e_y}$ et une composante selon $\overrightarrow{e_z}$ en fonction de la latitude λ du lieu :

$$\overrightarrow{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\overrightarrow{e_y} + \Omega\sin\lambda\,\overrightarrow{e_z}$$

On considère une vitesse des vents dirigée selon les lignes isobares : $\vec{v} = V\overrightarrow{e_x}$. La projection de la relation $2\rho\overrightarrow{\Omega}\wedge\vec{v} = -\overrightarrow{grad p}$ sur $\overrightarrow{e_y}$ donne simplement :

$$2\rho V\Omega\sin\lambda = -\frac{dp}{dy}\text{, soit encore : }\boxed{V = -\frac{1}{2\rho V\Omega\sin\lambda}\frac{dp}{dy}}$$

Pour $\lambda = 45°$ de latitude Nord, on peut estimer le gradient de pression à l'aide du graphe fourni (quasi-linéaire). A la surface de la Terre : $\Delta y \approx R_T\Delta\lambda$. Ainsi, en considérant les valeurs de pression en $\lambda = 30°$ (1 035 hPa) et $\lambda = 60°$ (995 hPa) :

$$\frac{dp}{dy} \approx \frac{\Delta p}{\Delta y} \approx \frac{1}{R_T}\frac{\Delta p}{\Delta\lambda} = -1,2.10^{-3}\ \mathrm{Pa.m^{-1}}$$

On obtient ainsi : $\boxed{V \approx 10\ \mathrm{m.s^{-1}}}$

La vitesse du vent géostrophique est de l'ordre de 40 km/h en moyenne. Cela correspond assez bien aux mesures faites dans l'atmosphère. Concernant le jet-stream, la structure locale de l'atmosphère, et notamment le profil vertical de température, va renforcer la vitesse des vents et lui donner ses caractéristiques si particulières.