Problème n°1 : (*) Pavillon acoustique d'un soubassophone

MOTS-CLES : ondes acoustiques dans un fluide, dispersion, énergie acoustique.

On cherche dans ce problème à étudier le profil du pavillon acoustique situé en sortie de d'un soubassophone (voir document suivant). Pour simplifier l'étude, on se place dans un cas unidimensionnel où les champs ne dépendent que de l'abscisse x. Le pavillon est supposé rigide, d'axe de révolution Ox et de section variable $S(x)$. Il contient de l'air qui, au repos, est à la pression p_0, possède une masse volumique μ_0 et un coefficient de compressibilité isentropique χ_s. Les effets de la pesanteur seront négligés dans tout le problème et l'on se place dans l'approximation acoustique. Au passage d'une perturbation sonore, le fluide subit un déplacement $\xi(x,t)$ essentiellement longitudinal selon Ox. La masse volumique et la pression à l'abscisse x et à la date t s'écrivent alors respectivement :

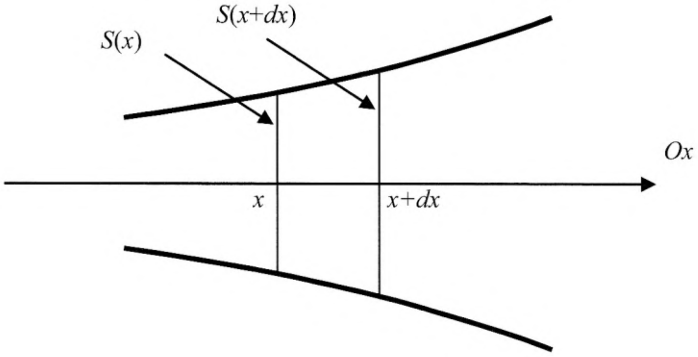
$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad \text{et} \qquad p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$$

Musicien d'une fanfare soufflant dans un soubassophone

© Renaud Carpentier

DOCUMENT d'après « Wikipédia.fr »

Le soubassophone ou sousaphone (souvent abrégé en « sousa », «souba») est un instrument de musique de la famille des cuivres, apparenté au tuba-contrebasse. Il présente sur le tuba l'avantage d'être porté sur l'épaule, d'une façon équilibrée, sans être en porte-à-faux avant comme le tuba. Ceci lui permet d'être joué en marchant sans trop de fatigue, d'où son grand succès dans les fanfares. De plus, il a l'avantage d'avoir un pavillon orienté de manière frontale : cela permet une projection du son plus efficace que celle du tuba. Enfin, les grandes dimensions du pavillon contribuent à une meilleure transmission dans l'air du son émis par l'instrument tout en attirant le public impressionné par sa taille. Malgré le fait que le soubassophone soit porté sur l'épaule, réduisant la fatigue, il reste un instrument assez lourd à porter en défilant, en particulier les modèles tout en métal, qui peuvent peser près de 15 kg (les modèles à pavillon en fibre de verre sont nettement plus légers mais ont un son plus « fermé », moins brillant).



1) Expliquer en quelques lignes l'intérêt du très grand évasement du pavillon du soubassophone.

2) Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

3) Ecrire l'équation d'Euler dans cette approximation.

On raisonne sur une tranche d'air contenu au repos dans le pavillon entre les abscisses x et $x + dx$.

4) Représenter cette tranche d'air à une date t quelconque lors du passage de la perturbation sonore en faisant apparaître $\xi(x,t)$ et $\xi(x+dx,t)$.

On note δ l'accroissement relatif du volume de cette tranche d'air entre l'état au repos et l'état perturbé.

5) Exprimer δ en fonction de $\xi(x,t)$, d'une de ses dérivées et de $\dfrac{1}{S}\dfrac{dS}{dx}$.

6) En écrivant le lien entre p_1 et δ, aboutir à l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la surpression :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\frac{\partial p_1}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=0$$

Exprimer la constante c en fonction des paramètres. Que représente-elle ?

On considère un pavillon dit « exponentiel », pour lequel la section est de la forme $S(x)=S_0\exp\left(Mx\right)$, où M est appelé le coefficient d'expansion.

7) Montrer qu'une onde plane progressive monochromatique dont la surpression complexe s'écrit $\underline{p}_1(x,t)=p_{10}\exp\left(j\left(\omega t-\underline{k}x\right)\right)$ peut se propager dans un tel pavillon et établir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω.

8) En posant $\underline{k}=k'-jk''$, mettre en évidence dans l'expression de la surpression les termes d'amortissement/amplification et de propagation.

9) Montrer que le pavillon exponentiel se comporte comme un filtre passe-haut en précisant sa pulsation de coupure ω_c.

10) Montrer par un raisonnement énergétique que l'expression de k'' était prévisible.

11) Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de c, ω_c et ω.

Une étude de la photo du soubassophone a permis d'accéder au diamètre D de la section du pavillon en fonction de l'abscisse x sur les dix derniers centimètres avant la sortie. Les résultats sont répertoriés dans le tableau suivant :

abscisse (mm)	574	594	613	632	650	662	675
diamètre (mm)	361	407	474	549	644	726	809

L'incertitude sur chaque valeur est de l'ordre de 5 mm.

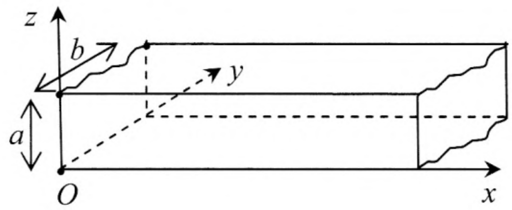
12) Peut-on considérer qu'il s'agit d'un pavillon exponentiel ?

13) Déterminer la fréquence de coupure, en Hz, du pavillon du soubassophone. Commenter sachant que la note la plus grave que l'on peut jouer avec un soubassophone est un fa0#, de fréquence 46,25 Hz et la note la plus aigue est un la2, de fréquence 220 Hz.

14) La modélisation développée dans ce problème permettait-elle d'expliquer la différence de sonorité entre un pavillon métallique et un pavillon en fibre de verre évoquée dans le document ? Pourquoi ?

Problème n°2 : (*) Guide d'onde rectangulaire

On considère un champ de la forme $\underline{\vec{E}} = A(z)\exp\left(i(\omega t - k\,x)\right)\overrightarrow{e_y}$ se propageant dans le vide entre quatre plans conducteurs localisés en $z=0$, $z=a$, $y=0$ et $y=b$, infinis dans la direction (Ox). Les champs sont supposés nuls à l'intérieur de ces conducteurs. Cette configuration constitue ce qu'on appelle un guide d'onde rectangulaire. On donne $a = 2{,}29\text{ cm}$, $b = 1{,}02\text{ cm}$.



1. En utilisant les relations de passage, donner les conditions aux limites qui doivent être satisfaites par $\underline{\vec{E}}$ à la surface des conducteurs. En déduire deux conditions sur la fonction $A(z)$.

2. Montrer que $A(z)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre suivante :
$\left(\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)A(z) + \dfrac{\mathrm{d}^2 A(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0$. En discutant, en fonction des valeurs prises par k, la comptabilité des solutions de cette équation avec les conditions aux limites, en déduire que $A(z)$ est nécessairement une fonction périodique dont on posera l'amplitude égale E_0 et dont on exprimera la période spatiale en fonction de k, ω et c.

3. Quelle est ainsi la nature de l'onde se propageant dans le guide. Justifier la terminologie utilisée de « guide d'onde » pour un tel dispositif.

4. a) Établir la relation de dispersion dans le guide ? Montrer que les valeurs de k sont discrètes et appartiennent à l'ensemble des $\{k_n\}$ où n est un entier positif. À une valeur de k_n donnée on associe un mode propre d'ordre n du guide d'onde. Montrer que dans chaque mode la propagation est dispersive. Que devient la relation de dispersion lorsque, dans un mode d'ordre n donné, la longueur d'onde λ est très inférieure à a ? Ce résultat était-il prévisible ?

b) Montrer que dans chaque mode propre du guide, l'onde ne peut se propager que si sa pulsation ω est supérieure à une pulsation de coupure caractéristique de ce mode ω_{c_n} que l'on exprimera en fonction de n, c et a. Calculer la fréquence de coupure ν_{c_1} dans le mode $n=1$. Tracer l'allure du champ électrique correspondant aux deux premiers modes de propagation guidée.

c) Tracer l'allure des courbes $k_n = f(\omega)$ correspondant aux trois premiers modes propres.

d) Exprimer la vitesse de phase $V_{\varphi_n} = \dfrac{\omega}{k_n}$ et la vitesse de groupe $V_{g_n} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_n}$ en fonction de c, ω et ω_{c_n} et tracer leur allure en fonction de ω pour une valeur de n donnée, commenter.

A.N. : pour le mode $n=1$ et pour $\nu = 7\text{ GHz}$.

5. a) Étudier la forme du champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$. On posera $B_{x_0}(z) = \dfrac{n\,\pi\,E_0}{\omega\,a}\cos\left(\dfrac{n\,\pi}{a}z\right)$ et $B_{z_0}(z) = \dfrac{k\,E_0}{\omega}\sin\left(\dfrac{n\,\pi}{a}z\right)$ les amplitudes respectives des composantes de $\vec{B}$ suivant (Ox) et (Oz). L'onde électromagnétique se propageant dans le guide est-elle transverse ? $\vec{B}$ est-il en phase avec $\vec{E}$? Ceci est-il en accord avec la structure de l'onde étudiée ? Dans quelle mesure peut-on parler de polarisation elliptique pour $\vec{B}$?

b) Étudier qualitativement la conséquence des conditions aux limites imposées aux champs pour les parois du guide, en termes de charges et de courants surfaciques.

6. a) Donner l'expression du vecteur de Poynting instantané $\vec{R}$ ainsi que celle de sa moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$. Comment interpréter le résultat que fournit leur comparaison au regard de la structure de l'onde étudiée ? Interpréter le résultat en termes de guidage.

b) Donner l'expression de l'énergie moyenne $\langle \delta W_S \rangle$ traversant une section droite du guide de hauteur a et de largeur b perpendiculaire à la direction de $\langle \vec{R} \rangle$ entre t et $t + \mathrm{d}t$, en fonction de V_g. Après avoir exprimé la densité volumique d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ dans le guide d'onde, en déduire la vitesse de propagation de l'énergie. Conclure. On rappelle que $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\,\pi}{a} z\right) \mathrm{d}z = \frac{a}{2}$.

A.N. : calculer la puissance moyenne P_m traversant une section droite du guide pour le mode $n = 1$ et pour $\nu = 7$ GHz et $E_0 = 10^3$ V m^{-1}.