

Problème n°1

1) La forme particulière du soubassophone permet une meilleure adaptation d'impédance entre l'intérieur de l'instrument et le milieu extérieur, afin de transmettre plus efficacement l'énergie sonore : la section de l'instrument varie en effet progressivement afin de limiter le retour de l'onde vers l'intérieur.

2) Dans l'approximation acoustique, on considère que l'onde sonore perturbe peu le fluide par rapport à la situation de repos. La masse volumique, la pression et la vitesse des particules de fluide (et leurs dérivées) admettent ainsi des variations d'ordre 1 par rapport à leurs valeurs au repos. Tous les calculs dans l'approximation acoustique sont menés à l'ordre 1 en négligeant tous les termes d'ordre supérieur. D'autre part, le fluide est en écoulement parfait si bien que l'évolution des particules de fluide est supposée isentropique (adiabatique et réversible).

3) L'équation d'Euler s'écrit, pour un fluide en écoulement parfait (en négligeant le terme de pesanteur) :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } p$$

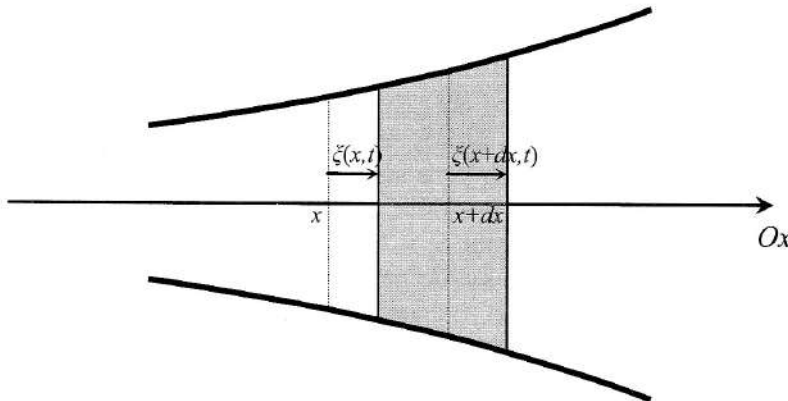
C'est-à-dire, avec la forme des champs proposée :

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (p_0 + p_1)$$

On limite alors les calculs à l'ordre 1, si bien qu'il reste simplement :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

4) On représente la tranche d'air à l'instant t :



5) L'accroissement relatif de volume est défini par : $\delta = \frac{V_f - V_i}{V_i}$. Le volume de la

tranche de fluide au repos vaut simplement : $V_i = S(x)dx$. Au passage de la perturbation, ce volume devient :

$$V_f = S(x + \xi(x, t))(x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t)) = S(x + \xi(x, t)) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

D'autre part, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 :

$$S(x + \xi(x, t)) = S(x) + \xi(x, t) \frac{dS}{dx}$$

On simplifie alors l'expression de l'accroissement relatif :

$$\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi(x, t) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$$

soit encore, en limitant les calculs à l'ordre 1 :

$$\delta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi(x, t) \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}$$

6) Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit : $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$. On reconnaît la variation relative de volume, ainsi que la surpression :

$$\chi_s = -\frac{\delta}{p_1}$$

On dérive alors p_1 par rapport au temps :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right]$$

On introduit la vitesse de la tranche de fluide à l'abscisse x : $v_1(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right]$$

On dérive à nouveau par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial t} \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right]$$

et on utilise l'équation d'Euler, pour aboutir à la relation demandée :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{en posant : } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

La constante c , homogène à une vitesse, correspondrait à la vitesse de propagation du son dans le cas d'une section S constante.

7) Pour le pavillon exponentiel, on a simplement : $\frac{dS}{dx} = MS(x)$ d'où : $\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = M$.

On reporte alors la forme de la surpression dans l'équation de propagation :

$$\left(-\underline{k}^2 - j\underline{k}M + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{p}_1(x, t) = 0$$

Pour que cette solution soit valable, il faut donc vérifier la relation de dispersion :

$$\omega^2 = c^2 (\underline{k}^2 + j\underline{k}M)$$

8) Avec $\underline{k} = k' - jk''$, la surpression devient $\underline{p}_1(x, t) = p_{10} e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$, c'est-à-dire en partie réelle :

$$\underline{p}_1(x, t) = p_{10} e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x)$$

Le terme $e^{-k''x}$ contient les propriétés d'amortissement (ou d'amplification) de l'onde, tandis que le terme $\cos(\omega t - k'x)$ contient les propriétés de propagation de l'onde.

9) La relation de dispersion précédente peut aussi s'écrire :

$$(k'^2 - k''^2 + k''M) + j(k'M - 2k'k'') = \frac{\omega^2}{c^2}$$

En identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on aboutit au système :

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 + k''M = \frac{\omega^2}{c^2} \\ k'(M - 2k'') = 0 \end{cases}$$

La solution $k' = 0$ étant à rejeter (absence de propagation), il vient alors :

$$k'' = \frac{M}{2}$$

Puis, en remplaçant dans la deuxième relation :

$$k'^2 = \frac{\omega^2 - \frac{M^2 c^2}{4}}{c^2}$$

On pose alors : $\omega_c = \frac{Mc}{2}$ de sorte que : $k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$

k' étant réel, la propagation de l'onde ne peut exister que si $\omega > \omega_c$: le pavillon exponentiel se comporte comme un **filtre passe-haut**, de pulsation de coupure ω_c . On remarquera que le signe de k'' est imposé alors que le signe de k' va définir le sens de propagation de l'onde. Pour $k' > 0$, l'onde sortant du soubassophone est amortie (car l'énergie de l'onde est répartie sur une surface de plus en plus grande). En revanche, pour $k' < 0$, l'onde qui rentre dans le pavillon exponentiel est amplifiée : c'est le cas du sonotone du professeur Tryphon Tournesol dans Tintin !

10) D'après l'équation d'Euler : $\frac{\partial p_1}{\partial x} = -jk'p_1 = -\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\mu_0 j\omega v_1$, avec la surpression $\underline{p}_1(x,t) = p_{10} e^{j(\omega t - k'x)}$, d'où l'expression de la vitesse en notation complexe :

$$\underline{v}_1 = \frac{k' - jk''}{\omega\mu_0} p_{10} e^{j(\omega t - k'x)}, \text{ puis en partie réelle :}$$

$$v_1(x,t) = \frac{p_{10}}{\omega\mu_0} e^{-k''x} (k' \cos(\omega t - k'x) + k'' \sin(\omega t - k'x))$$

On en déduit alors le vecteur densité de courant de puissance sonore :

$$\vec{\Pi}(x,t) = p_1(x,t) v_1(x,t) \vec{e}_x$$

avec : $\Pi(x,t) = \frac{p_{10}^2}{\omega\mu_0} e^{-2k''x} \cos(\omega t - k'x) (k' \cos(\omega t - k'x) + k'' \sin(\omega t - k'x))$ et sa moyenne temporelle :

$$\langle \Pi(x,t) \rangle = \frac{k' p_{10}^2}{2\omega\mu_0} e^{-2k''x}$$

La conservation de la puissance sonore moyenne dans le pavillon exponentiel (dans l'approximation acoustique) impose alors :

$$\langle \Pi(x,t) \rangle S(x) = C^{te}, \text{ soit encore : } \langle \Pi(x,t) \rangle S_0 e^{Mx} = \frac{k' p_{10}^2}{2\omega\mu_0} S_0 e^{(M-2k'')x} = C^{te}$$

c'est-à-dire simplement :

$$k'' = \frac{M}{2}$$

On retrouve bien la valeur de k'' obtenue précédemment.

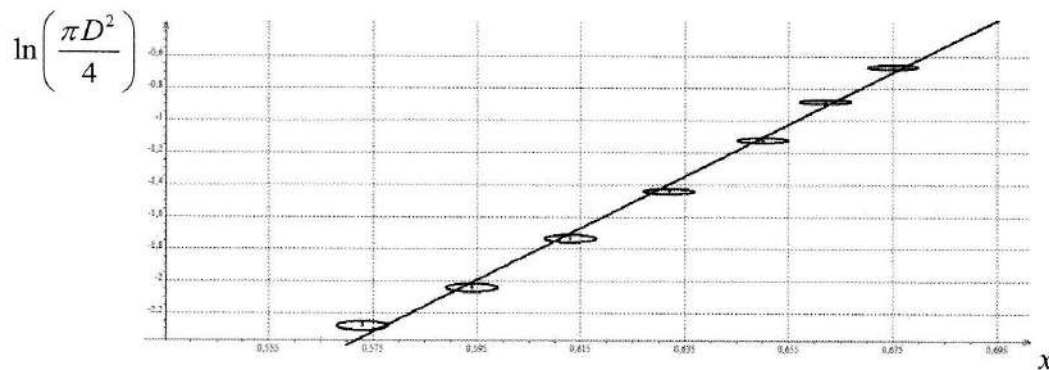
11) La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe s'écrit quant à elle : $v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\left(\frac{dk'}{d\omega}\right)}$, soit : $v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$

Dans le pavillon exponentiel, l'onde ne se propage pas à la vitesse c !

12) La section du pavillon exponentiel vérifie la relation $S(x) = S_0 e^{Mx}$, c'est-à-dire encore : $\ln(S(x)) = \ln S_0 + Mx$. On trace alors $\ln\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)$ en fonction de x (le diamètre D et l'abscisse x sont exprimés en mètres) :



La relation est linéaire : le pavillon du soubassophone peut être considéré comme un pavillon exponentiel. La régression linéaire permet d'obtenir la valeur de M :

$$M = (16,2 \pm 1,3) \text{ m}^{-1}$$

13) La fréquence de coupure vaut alors : $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{Mc}{4\pi}$. En prenant pour c la valeur

usuelle de $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, on obtient : $f_c = (438 \pm 35) \text{ Hz}$. Cette fréquence de coupure correspond à peu près à un la3 (440 Hz, la fréquence d'un diapason). On constate donc que l'ensemble des notes jouées par le soubassophone a une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du pavillon : cela signifie que les ondes vont être principalement réfléchies à l'embouchure du tube. Il va donc se créer des ondes stationnaires à l'intérieur du soubassophone, le joueur modifiant la longueur du tube par un jeu de pistons afin de jouer la note qu'il désire. Le pavillon n'est donc pas une parfaite adaptation d'impédance, car les ondes restent principalement réfléchies à l'embouchure, mais il permet d'augmenter le coefficient de transmission de l'intérieur vers l'extérieur de l'instrument et ainsi augmenter

le volume sonore émis. Il est possible de faire deux analogies de ce phénomène. D'une part, le pavillon acoustique est l'équivalent du miroir de sortie d'un laser, ce dernier devant être suffisamment réfléchissant afin d'obtenir l'effet laser dans la cavité tout en restant partiellement transparent pour que de la lumière puisse néanmoins en sortir. D'autre part, le pavillon peut être vu comme une barrière de potentiel à l'intérieur de laquelle l'onde acoustique est évanescence : une partie du son situé dans l'instrument réussit alors à s'échapper à travers le pavillon par effet tunnel.

14) Le modèle présenté considère un instrument rigide et une solution sous la forme d'une onde plane. En réalité, il y a un couplage supplémentaire entre les modes de vibration de l'instrument (qui dépendent de la forme de l'instrument et des propriétés d'élasticité du matériau) et l'onde sonore elle-même, dont le profil n'est plus celui d'une onde plane.

Problème n°2

1. À la surface du conducteur parfait en $z=0$ et $z=a$, par continuité de la composante tangentielle de \vec{E} , qui doit être nul dans le conducteur, on a, le champ étant purement tangentiel : $\vec{E}=\vec{0}$. Ainsi $\forall x$ et $\forall t$, $\vec{E}(x, z=0, t)=\vec{E}(x, z=a, t)=\vec{0}$, et donc $A(z=0)=A(z=a)=0$.

2. Dans le vide, entre les deux conducteurs, \vec{E} satisfait à l'équation de d'Alembert $\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$, où le Laplacien vectoriel de \vec{E} est donné par :

$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \nabla^2 \underline{E}_x \vec{e}_x + \nabla^2 \underline{E}_y \vec{e}_y + \nabla^2 \underline{E}_z \vec{e}_z$ ($\nabla^2 = \Delta$ étant le Laplacien scalaire). Or, \vec{E} n'ayant de composante que suivant \vec{e}_y , l'équation de d'Alembert scalaire s'écrit simplement

$$\nabla^2 \underline{E}_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial t^2} = 0, \text{ soit avec } \underline{E}_y = E_y(x, z) : \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \text{ Avec}$$

$E_y = A(z) \exp(i(\omega t - k x))$, il vient alors :

$$\left(-k^2 A(z) + \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \right) \exp(i(\omega t - k x)) + \frac{\omega^2}{c^2} A(z) \exp(i(\omega t - k x)) = 0, \text{ soit encore :}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A(z) + \frac{d^2 A(z)}{dz^2} = 0 \quad (1) \text{ qui est l'équation différentielle satisfaite par } A(z). \text{ Trois cas}$$

sont alors envisageables en fonction de la valeur du vecteur d'onde k .

→ Si $k = \frac{\omega}{c}$ alors (1) s'écrit $\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = 0$, qui a pour solution $A(z) = \alpha z + \beta$, où α et β sont des constantes. Or $A(z=0)=0$ implique $\beta=0$ et donc $A(z) = \alpha z$. La seconde condition aux limites $A(z=a)=0$ implique alors $\alpha=0$. Autrement dit, une variation linéaire de $A(z)$ n'est compatible avec les conditions aux limites que si A est nul partout. Ainsi le cas $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ est sans intérêt.

→ Dans le cas où $k > \frac{\omega}{c}$ posons $\chi^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$, $\chi > 0$ de sorte que (1) s'écrit

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} - \chi^2 A(z) = 0.$$

La solution de cette équation est de la forme $A(z) = \alpha \exp(\chi z) + \beta \exp(-\chi z)$. Avec $A(z=0) = 0$ il vient $\alpha + \beta = 0$ soit $A(z) = \alpha (\exp(\chi z) - \exp(-\chi z)) = 2 \alpha \operatorname{sh}(\chi z)$. Cette solution est incompatible avec $A(z=a) = 0$ et doit donc être également écartée.

→ Reste à envisager le cas où $k < \frac{\omega}{c}$: posons $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \chi > 0$ de sorte que (1) s'écrit

$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} + \chi^2 A(z) = 0$ dont la solution est de la forme $A(z) = \alpha \cos(\chi z) + \beta \sin(\chi z)$. La

première condition aux limites $A(z=0) = 0$ conduit à poser $\alpha = 0$, la seconde entraîne que

$\beta \sin(\chi a) = 0$ soit $\sin(\chi a) = 0$ et donc $\chi = \frac{n \pi}{a}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

L'amplitude de $A(z)$ étant posée égale à E_0 on a finalement $A(z) = E_0 \sin\left(\frac{n \pi}{a} z\right), n \in \mathbb{N}^*$.

Cette solution de période $\frac{2a}{n}$ satisfait bien aux deux conditions aux limites du problème.

3. D'après ce qui précède, $\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi}{a} z\right) \exp(i(\omega t - k x)) \vec{e}_y$. Ce champ ne caractérise pas une onde plane puisque son amplitude dépend de z , mais il peut être considéré comme la superposition d'une onde progressive dans la direction $(Ox)^+$ parallèlement aux plans des conducteurs, et d'une onde stationnaire dans la direction (Oz) perpendiculaire aux plans des conducteurs.

L'onde ne pouvant pénétrer dans les conducteurs parfaits, elle reste confinée entre les plans conducteurs. Se propageant dans la direction $(Ox)^+$, elle est ainsi guidée dans sa propagation entre les plans conducteurs.

4. a) La relation de dispersion liant k à ω est une conséquence des conditions aux limites en $z = 0$ et $z = a$ qui imposent, d'après ce qui a été vu à la question 2 : $\chi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = \frac{n \pi}{a}$,

$n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi la relation de dispersion est $k_n = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n \pi}{a}\right)^2}$ (2). Cette relation est non

linéaire, l'espace vide entre les deux plans conducteurs est donc dispersif.

Ici, la dispersion ne vient pas de la nature du milieu traversé par l'onde (comme c'est le cas dans un milieu tel le verre ou dans un plasma par exemple) mais doit être attribuée aux conditions aux limites. En effet, par rapport au vide en propagation libre, on a ici des plans conducteurs limitant l'onde et lui imposant des conditions aux limites déterminées (d'où provient la relation (2)). Ainsi, c'est le confinement de l'onde qui entraîne le caractère dispersif de la propagation et non la nature du milieu de propagation.

Dans le mode propre d'ordre n (donc pour une valeur de n fixée), on peut écrire la relation de

dispersion sous la forme $\omega = c \sqrt{k_n^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} = c \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_n^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}$, soit $\omega = \frac{c}{\lambda} \sqrt{4\pi^2 + \left(\frac{\lambda_n}{a}\right)^2 n^2 \pi^2}$.

Ainsi, dans la limite $\frac{\lambda_n}{a} \rightarrow 0$, il vient $\omega \approx \frac{c}{\lambda} \sqrt{4\pi^2} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ soit finalement $k \approx \frac{\omega}{c}$: l'espace

entre les plans conducteurs n'est plus dispersif et on retrouve la même relation de dispersion que dans le vide. Ceci était prévisible puisque, lorsque $\lambda \ll a$, cela revient, à l'échelle de la longueur d'onde, à « rejeter » les conducteurs à l'infini. L'onde « voit » un espace de propagation libre.

b) À chaque valeur de n correspond une valeur de k possible $k = k_n = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n \pi}{a}\right)^2}$, et à

chaque k_n correspond une phase de l'onde $\phi_n = \omega t - k_n x$ et une amplitude $E_0 \sin\left(\frac{n \pi}{a} z\right)$,

caractérisant un mode de propagation dit mode propre d'ordre n . L'onde est progressive dans le mode d'ordre n à condition que k_n soit réel. En effet, un nombre d'onde imaginaire pur

$$k_n = i \eta_n \text{ conduirait à écrire le champ sous la forme } \vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n \pi}{a} z\right) \exp(i \omega t) \exp(\eta_n x) \vec{e}_y$$

qui, de part le découplage spatio-temporel de la phase, caractérise une onde non plus progressive mais stationnaire.

Ainsi, la condition d'existence de l'onde progressive dans le mode d'ordre n se traduit par

$$k_n = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n \pi}{a}\right)^2} \text{ réel, soit : } \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} > 0 \text{ et donc } \omega > \omega_{c_n} \text{ où } \boxed{\omega_{c_n} = \frac{n \pi c}{a}}$$

est la pulsation de coupure dans le mode n . Pour $n=1$, la fréquence de coupure est $\nu_{c_1} = \frac{c}{2a}$, soit

$$\boxed{\nu_{c_1} \approx 6,55 \text{ GHz}}$$

→ Le champ électrique correspondant au premier mode $n=1$ a pour expression, en notation

$$\text{réelle : } \vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_1 x) \vec{e}_y, \text{ avec } k_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \text{ et } \omega > \omega_{c_1} = \frac{\pi c}{a}.$$

Ce champ est progressif dans la direction $(Ox)^+$ et stationnaire suivant (Oz) . La position des nœuds de sa

composante stationnaire est donnée par $\sin\left(\frac{\pi}{a} z_{N_1}\right) = 0$, soit $\frac{\pi}{a} z_{N_1} = p \pi$, $p \in \mathbb{N}^*$, d'où

$z_{N_1} = p a$. Les seules valeurs possibles pour p dans le mode fondamental sont donc $p=0$ et $p=1$, auxquelles correspondent les deux nœuds en $z=0$ et $z=a$.

→ Le champ électrique correspondant au premier mode $n=2$ a pour expression :

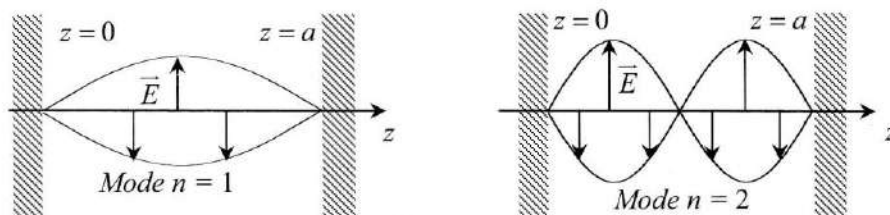
$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{2 \pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k_2 x) \vec{e}_y, \text{ avec } k_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2 \pi^2}{a^2}} \text{ et } \omega > \omega_{c_2} = \frac{2 \pi c}{a}.$$

La position des nœuds de sa composante stationnaire est donnée par $\sin\left(\frac{2 \pi}{a} z_{N_2}\right) = 0$, soit $\frac{2 \pi}{a} z_{N_2} = p \pi$,

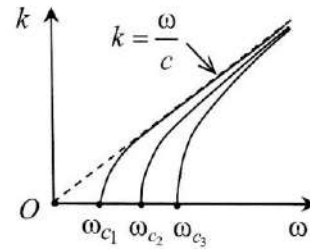
$p \in \mathbb{N}^*$, d'où $z_{N_2} = \frac{p a}{2}$. Les seules valeurs possibles pour p dans ce mode sont donc $p=0$,

$p=1$ et $p=2$ auxquelles correspondent les deux nœuds en $z=0$, $z=\frac{a}{2}$ et $z=a$.

L'enveloppe de l'extrémité du champ électrique à un instant donné est représentée ci-dessous dans les deux premiers modes.



c) L'allure des courbes $k_n = f_n(\omega)$ correspondant aux trois premiers modes propres $n=1, n=2$ et $n=3$ est donnée ci-après.



⚡ Ne pas oublier, dans le tracé à main levée, de rendre compte du comportement asymptotique : dans chaque mode, la courbe représentative de

$k_n(\omega)$ admet pour asymptote la droite $k = \frac{\omega}{c}$.

d) La vitesse de phase est définie par $V_{\phi_n} = \frac{\omega}{k_n}$, soit :
$$V_{\phi_n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c_n}}{\omega}\right)^2}}$$

On constate que $V_{\phi} > c$, ce qui n'a rien de gênant puisque V_{ϕ} est relative à la propagation de la phase, objet mathématique sans rapport avec la propagation de l'énergie, égale à la vitesse de groupe, dont on devra s'assurer par la suite qu'elle se propage bien à une vitesse inférieure ou égale à c . La vitesse de groupe est donnée par $V_{g_n} = \frac{d\omega}{dk_n}$.

✍ Il s'agit de l'inverse de la pente locale de la courbe de dispersion $k_n = f(\omega)$.

En différenciant la relation de dispersion, il vient :

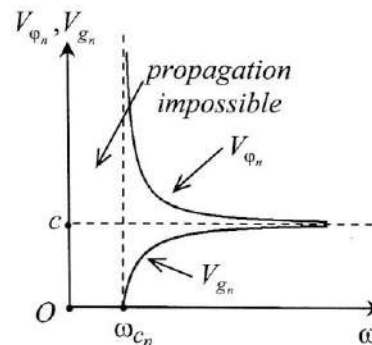
$$V_{g_n} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c_n}}{\omega}\right)^2}. \text{ On vérifie bien que } V_g < c. \text{ Remarquons que } V_{g_n} V_{\phi_n} = c^2.$$

Numériquement pour $n=1$ et $\nu = 7 \text{ GHz}$, on trouve $V_{\phi_1} = 8,5 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et

$$V_{g_1} = 1,06 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dans un mode d'ordre n donné, V_{ϕ_n} et V_{g_n} admettent pour asymptote verticale la droite $\omega = \omega_{c_n}$, et ne sont définies que sur la plage de fréquence $\omega > \omega_{c_n}$. Ainsi, ω_{c_n} apparaît bien comme une fréquence de coupure, au-dessous de laquelle le propagation dans le guide est impossible.

Pour $\omega \gg \omega_{c_n}$ (ce qui revient à se placer dans des hautes fréquences c'est-à-dire des petites longueurs d'onde : $\lambda \ll a$), V_{ϕ_n} et V_{g_n} tendent vers la même asymptote horizontale correspondant à la vitesse c de la lumière dans le vide : la dispersion est négligeable et on a $V_{\phi} \approx V_g \approx c$, comme dans le vide illimité.



5. a)

⚡ L'onde est monochromatique mais non plane, donc attention à ne pas utiliser la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ ni l'équation de (M.F) sous forme complexe

$-i \vec{k} \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B}$ réservée aux OPPM ! Il faut ici intégrer l'équation de (M.F)

sous sa forme la plus générale : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

On obtient :

$$\begin{array}{l} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array} = \begin{array}{l} \frac{n \pi E_0}{\omega a} \cos\left(\frac{n \pi}{a} z\right) \sin(\omega t - k x) \\ 0 \\ \frac{k E_0}{\omega} \sin\left(\frac{n \pi}{a} z\right) \cos(\omega t - k x) \end{array}$$

On reconnaît là l'équation paramétrique d'une ellipse, à condition que $B_{x_0}(z)$ et $B_{z_0}(z)$ soient constants, ce qui implique donc de se placer à $z = \text{cte}$. Il ne s'agit cependant pas d'une polarisation au sens défini pour une OPPM, puisqu'ici l'ellipse n'est pas dans un plan transverse à la direction de propagation, mais au contraire dans le plan (O, x, z) contenant le vecteur directeur de la direction de propagation. Son sens de parcours ne peut être obtenu avec la même convention (sens vu par un observateur regardant venir l'onde) que celle utilisée pour une OPPM.

On a supposé que \vec{E} était polarisé rectilignement suivant (Oy) , se propageant suivant (Ox) . \vec{E} est donc transverse : on parle de mode transverse électrique, dite mode TE. On obtient alors un champ \vec{B} polarisé elliptiquement avec une composante transverse $B_z = B_{z_0} \cos(\omega t - k x)$ en phase avec \vec{E} et une composante longitudinale (dans la direction de propagation) $B_x = B_{x_0} \sin(\omega t - k x)$ en quadrature avec \vec{E} . Ainsi, \vec{B} n'est ni transverse, ni en phase avec \vec{E} . Dans la mesure où l'onde n'est pas plane ceci n'a rien de surprenant ...

b) Étudions les conséquences des conditions aux limites $z=0$ et $z=a$. L'existence d'une composante de \vec{B} parallèle aux plans conducteur limitant le guide en $z=0$ et $z=a$ entraîne l'apparition de courants de surface sur les plans conducteurs.

Par contre, \vec{E} n'ayant pas de composante normale à ces mêmes surfaces, il n'y a pas de charges superficielles sur les conducteurs : $\sigma=0$ en $z=0$ et $z=a$.

Étudions à présent les conséquences des conditions aux limites $y=0$ et $y=b$. \vec{E} peut être non nul sur les plans $y=0$ et $y=b$, mais alors il leur est normal et une densité surfacique de charge apparaît sur ces plans. En effet, à la surface des conducteurs en $y=0$ et $y=b$, les relations de passage pour \vec{E} s'écrivent :

$$\text{en } y=0 : \vec{E}(y=0^+) - \vec{E}(y=0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y \quad \text{et en } y=b : \vec{E}(y=b^-) - \vec{E}(y=b^+) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y.$$

Dans les conducteurs, les champs sont nuls : $\vec{E}(y=0^-) = \vec{0}$ et $\vec{E}(y=b^+) = \vec{0}$.

Ainsi $\vec{E}(y=0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y$ et $\vec{E}(y=b^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_y$. En conséquence, à la surface des conducteurs en $y=0$ et $y=b$, les champs étant normaux et non nul, on doit leur associer une densité surfacique de charge σ sur les deux conducteurs en $y=0$ et $y=b$.

D'autre part, \vec{B} est purement tangentiel à la surface des conducteurs en $y=0^+$ comme en $y=b^-$ et nul en leur sein en $y=0^-$ et $y=b^+$. Il y a donc une discontinuité tangentielle de \vec{B} qui entraîne l'apparition de courants surfaciques les deux conducteurs en $y=0$ et $y=b$, ce que traduisent les relations de passage en $y=0$ et $y=b$.

6. a) Pour exprimer le vecteur de Poynting instantané, il est impératif d'utiliser les expressions réelles des champs : $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. On obtient :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{k E_0^2}{\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos^2(\omega t - kx) \\ 0 \\ \frac{k E_0^2}{2\omega} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin(2(\omega t - kx)) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \langle \vec{R} \rangle = \frac{k E_0^2}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \vec{e}_x.$$

⚡ Ne pas utiliser une formule « tout faite » du type $\vec{R} = \epsilon_0 c E^2 \vec{n}$, réservée à l'onde plane.

On constate qu'en moyenne, seule la composante longitudinale (suivant $(Ox)^+$) de \vec{R} se propage, alors qu'en valeur instantanée \vec{R} a aussi une composante transversale (suivant (Oz)). Ceci était prévisible puisqu'on a établi (question 3) que transversalement l'onde est stationnaire, et dans ce cas, l'énergie ne se propage pas. On pouvait aussi anticiper le fait que, E_y et B_x étant en quadrature, $\langle E_y B_x \rangle = 0$ et qu'ainsi la contribution à $\langle \vec{R} \rangle$ de E_y et B_x est nulle. Ainsi, en moyenne, l'énergie ne se propage que suivant $(Ox)^+$. Elle reste confinée entre les plans conducteurs où elle est guidée dans une direction parallèle à leur surface.

b) La puissance moyenne traversant un élément de surface $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$ (perpendiculaire à $\langle \vec{R} \rangle$) est : $\langle P_{dS} \rangle = \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{k E_0^2}{2\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dy dz$. Ainsi l'énergie moyenne traversant une section droite du guide de hauteur a et de largeur b , entre t et $t+dt$ est

$$\langle \delta W_S \rangle = \int_0^a \int_0^b \langle P_{dS} \rangle dt = \frac{b k E_0^2}{2\mu_0 \omega} \left(\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz \right) dt.$$

Avec $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} z\right) dz = \frac{a}{2}$, il vient $\langle \delta W_S \rangle = \frac{a b k E_0^2}{4\mu_0 \omega} dt$.

Finalement, avec $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{V_\phi} = \frac{V_g}{c^2}$ et $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$: $\langle \delta W_S \rangle = a b \frac{V_g \epsilon_0 E_0^2}{4} dt$ (3).

La densité volumique d'énergie $\langle u_{em} \rangle$ est donnée par :

$$\langle u_{em} \rangle = \left\langle \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\left(\frac{k}{\omega} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2 \right) \right) + \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2.$$

D'après la relation de dispersion (2), on sait que $\left(\frac{k}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2$, de sorte que :

$$\langle u_{em} \rangle = \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} z \right) \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} - \frac{E_0^2}{2\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2 \right) + \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2.$$

L'énergie moyenne $\langle \delta W_{dS} \rangle$ traversant l'élément de surface $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$ perpendiculaire à $\langle \vec{R} \rangle$ entre t et $t + dt$ est contenue dans le cylindre droit de section dS et de génératrice $V_e dt$.

Le produit du volume de ce cylindre $dS V_e dt$ par la densité volumique d'énergie moyenne $\langle u_{em} \rangle$ est donc égal à : $\langle \delta W_{dS} \rangle = \langle u_{em} \rangle dy dz V_e dt$. Ainsi, l'énergie moyenne traversant une section droite du guide de hauteur a et de largeur b entre t et $t + dt$ est :

$\langle \delta W_S \rangle = \int_0^a \int_0^b \langle u_{em} \rangle dy dz V_e dt$. Reportons-y l'expression de $\langle u_{em} \rangle$, il vient :

$$\langle \delta W_S \rangle = V_e dt b \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} - \frac{E_0^2}{2\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2 \right) \left(\int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} z \right) dz \right) + a b V_e dt \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2, \text{ avec}$$

$$\int_0^a \sin^2 \left(\frac{n\pi}{a} z \right) dz = \frac{a}{2}, \quad \langle \delta W_S \rangle = V_e dt a b \left(\frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} - \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2 \right) + a b V_e dt \frac{E_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{n\pi}{\omega a} \right)^2, \text{ soit}$$

$$\langle \delta W_S \rangle = V_e a b \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} dt. \text{ Comparons à (3), il vient : } \boxed{V_e = V_g}.$$

La vitesse de propagation de l'énergie dans le guide est donc égale à la vitesse de groupe.

La puissance moyenne traversant une section droite du guide est donc
$$P_m = a b \frac{V_g \epsilon_0 E_0^2}{4}.$$

Numériquement, pour $n=1$ et $\nu = 7$ GHz avec $V_g = 1,06 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve $\boxed{P_m = 54,7 \text{ mW}}$ (de l'ordre de la centaine de mW).