2. Étude d'un train d'onde ☺☺

Un train d'onde se propage selon un axe *(Ox)*, dans le sens des x croissants, à la célérité $c = 3\ m.s^{-1}$.

A $t=0$, il est décrit par:

- $F(x)=2\sin(2\pi x)$ pour $0\leq x\leq 1$.
- $F(x)=0$ pour $x<0$ et $x>1$.

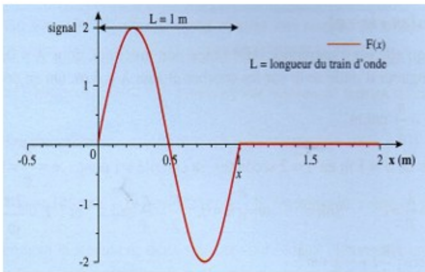
1 – Représenter $F(x)$.

2 – Déterminer l'expression littérale du signal $s(x,t)$ pour toute date t et tout point M d'abscisse x .

3 – Représenter $s(x,2)$ et $s(3,t)$.

Solution :

1 – Fonction sinus d'amplitude 2, pour $0 < x < 1$.
D'où le graphe ci-contre.



2 – On connait $F(x)$ à $t = 0$.
On est en **analyse spatiale**, ainsi, $s(x,t) = F(x - ct)$.

On obtient : $\begin{cases} s(x,t) = 2\sin[2\pi(x-ct)] \text{ pour } 0 \leq x - ct \leq 1. \\ s(x,t) = 0 \text{ pour } x - ct < 0 \text{ et } x - ct > 1. \end{cases}$

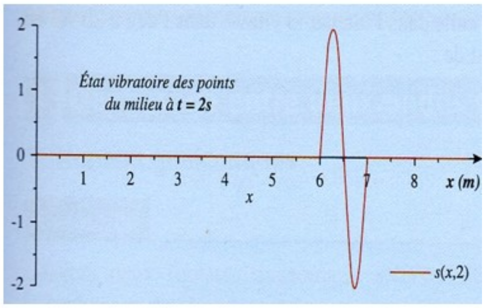
D'où : $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{s(x,t) = 2\sin[2\pi(x-ct)] \text{ pour } ct \leq x \leq 1 + ct.} \\ \boldsymbol{s(x,t) = 0 \text{ pour } x < ct \text{ et } x > 1 + ct\,.} \end{cases}}$

3 – Pour $s(x,2)$; On fait $t = 2s$ et $c = 3$ m.s^{-1} dans l'expression précédente.

On obtient donc : $\begin{cases} s(x,2) = 2\sin[2\pi x - 12\pi] \text{ pour } 6 \leq x \leq 7. \\ s(x,2) = 0 \text{ pour } x < 6 \text{ et } x > 7\,. \end{cases}$

Ou encore : $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{s(x,2) = 2\sin[2\pi x] \text{ pour } 6m \leq x \leq 7m.} \\ \boldsymbol{s(x,2) = 0 \text{ pour } x < 6m \text{ et } x > 7m\,.} \end{cases}}$

D'où la courbe ci-contre.



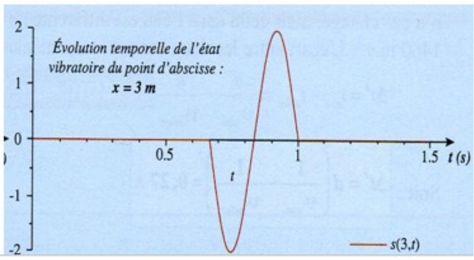
Ou bien : En 2s, l'onde s'est déplacée de $d = ct = 6$ m.
Le graphe a la même allure qu'en 1°, mais décalé de 6 m en abscisse.

- Pour $s(3,t)$; On fait $x = 3$ m et $c = 3$ m.s^{-1} dans l'expression du 2°.

On obtient donc : $\begin{cases} s(3,t) = 2\sin[6\pi - 6\pi t] \text{ pour } 3t \leq 3 \leq 3t + 1. \\ s(3,t) = 0 \text{ pour } 3 < 3t \text{ et } 3 > 3t + 1\,. \end{cases}$

Ou encore : $\begin{cases} s(3,t) = 2\sin[-6\pi t] \text{ pour } \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \\ s(3,t) = 0 \text{ pour } t < \frac{2}{3} \text{ et } t > 1\,. \end{cases}$

Enfin : $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{s(3,t) = -2\sin(6\pi t) \text{ pour } \frac{2}{3} \approx 0{,}7s \leq t \leq 1s.} \\ \boldsymbol{s(3,t) = 0 \text{ pour } t < \frac{2}{3} \approx 0{,}7s \text{ et } t > 1s\,.} \end{cases}}$



Ou bien : Passage d'une analyse spatiale à une analyse temporelle.
Le front d'onde a atteint $x = 3$m au bout de $\boldsymbol{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \approx 0{,}667$ s.
La fin de l'onde atteint $x = 3$m au bout de $\boldsymbol{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{3}} = 1$ s.
La période temporelle $T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ s.

4. Déphasage ☺☺

Une corde vibrante est excitée de manière sinusoïdale par un vibreur placé en x=0 qui lui impose un mouvement transversal : $u(0,t)=u_0\cos(\omega t)$ de pulsation ω. Une onde se propage dans le sens des x croissants.

1. Quel est le signal *u(x,t)* ?

2. Représenter les courbes *u(x₀,t) dans les 4 cas suivants :* $x_0=\frac{\lambda}{4}$, $x_0=\frac{\lambda}{2}$, $x_0=\frac{3\lambda}{4}$ *et* $x_0=\lambda$ *comment appelle-t-on ce type de représentation ? Déterminer dans chaque cas le déphasage de u(x₀,t)par rapport à u(0,t).*

Solution :

1. $u(x,t)=u_0\cos(\omega(t-\frac{x}{c}))=u_0\cos(\frac{2\pi}{T}(t-\frac{x}{c}))=u_0\cos(2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}))$

1^er^ cas : $x_0=\frac{\lambda}{4}$ $u(\frac{\lambda}{4},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{\lambda}{4}\times\frac{1}{\lambda})$ d'où $\boxed{u(\frac{\lambda}{4},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-\frac{\pi}{2})}$.

$u(\frac{\lambda}{4},t)$ **est en retard de** $\frac{\pi}{2}$ **par rapport au signal** $u(0,t)$.

2^ème^ cas : $x_0=\frac{\lambda}{2}$ $u(\frac{\lambda}{2},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{\lambda}{2}\times\frac{1}{\lambda})$ d'où $\boxed{u(\frac{\lambda}{2},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-\pi)}$.

$u(\frac{\lambda}{2},t)$ **est en opposition de phase par rapport à** $u(0,t)$

3^ème^ cas : 1er cas : $x_0=\frac{3\lambda}{4}$ $u(\frac{3\lambda}{4},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-2\pi\frac{3\lambda}{4}\times\frac{1}{\lambda})$ d'où

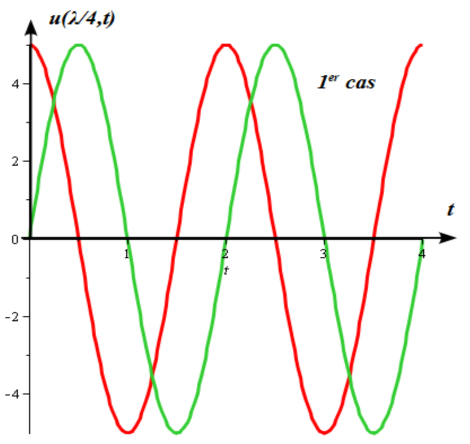
$\boxed{u(\frac{3\lambda}{4},t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-\frac{3\pi}{2})=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2})}$.

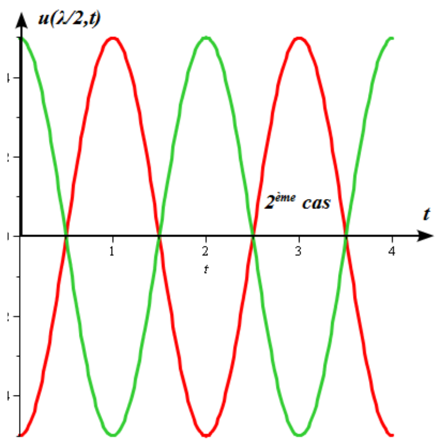
$u(\frac{3\lambda}{4},t)$ **est en avance de** $\frac{\pi}{2}$ **ou en retard de** $\frac{3\pi}{2}$ **par rapport au signal** $u(0,t)$.

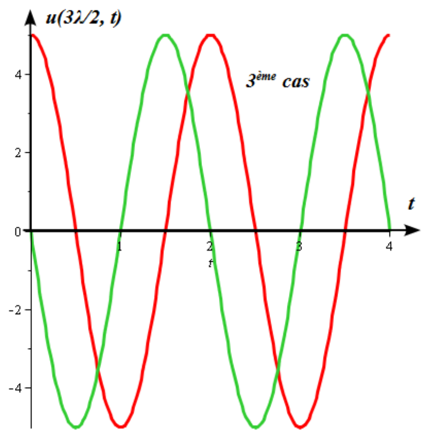
4^ème^ cas : $x_0=\lambda$ $\boxed{u(\lambda,t)=u_0\cos(2\pi\frac{t}{T}-2\pi)}$.

$u(\lambda,t)$ **est en phase avec** $u(0,t)$.

Le mode de représentation correspond au **mode temporel**.

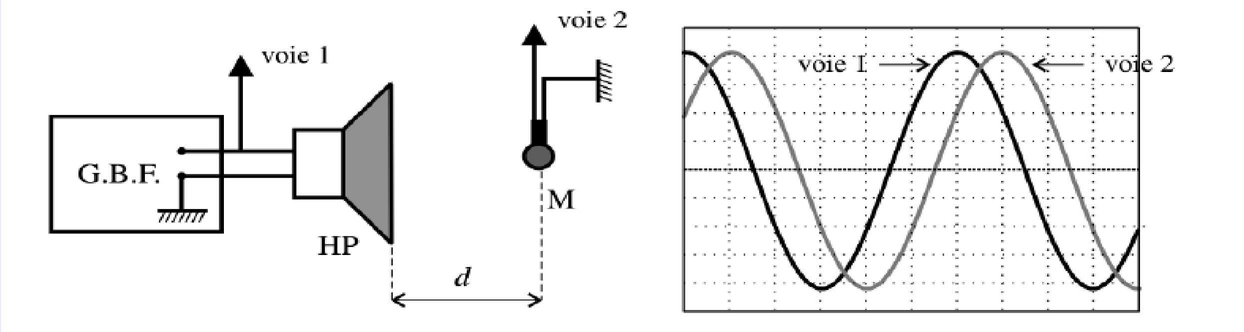






5. Étude expérimentale d'une onde progressive sinusoïdale ☺☺

Un haut-parleur (HP) est mis en vibration à l'aide d'un générateur de basses fréquences GBF réglé sur la fréquence f = 1500Hz. L'onde sonore ainsi créée se propage dans l'air à la célérité v = 342 m.s^{-1}. Un microphone M placé à distance d du haut-parleur reçoit le signal sonore et le transforme en un signal électrique. Les signaux du GBF et du microphone sont envoyés respectivement sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope.



1. Pour une certaine position de M et un réglage adéquat de l'oscilloscope, l'écran a l'aspect représenté sur la figure ci-dessus. Quel est le déphasage des signaux visualisés ?
2. L'oscilloscope étant synchronisé sur la voie 1, comment évolue la courbe de la voie 2 lorsqu'on éloigne M du HP?
3. De combien doit-on augmenter d pour voir les deux signaux en phase ? Quel est le meilleur moyen pour savoir si deux signaux sont en phase ?

Solution

1. Le signal de la voie 1 est en avance sur celui de la voie 2 car il s'annule en premier. La période représente 6 carreaux, et le déphasage 1 carreau . On en déduit : $\boxed{\Delta\phi_{2/1}=\frac{2\pi\times 1}{6}=-\frac{\pi}{3}=-1{,}05\,rad}$.

2. Au fur et à mesure que l'on éloigne le micro, le signal correspondant (voie 2) est de plus en plus en retard sur le signal du GBF. La courbe 2 se décale progressivement vers la droite.

3. Pour avoir les 2 signaux en phase il faut augmenter le retard de phase de $\varphi=(2\pi-\frac{\pi}{3})=\frac{5\pi}{3}$, la distance correspondante est $\boxed{d=\frac{\varphi\times\lambda}{2\pi}=\frac{5\pi}{3}\times\frac{c}{f\times 2\pi}=\frac{5\pi}{3}\times\frac{342}{1500\times 2\pi}=0{,}19\,m}$.

Pour constater expérimentalement que 2 signaux sont en phase, la meilleure méthode consiste à passer en mode XY. On voit un segment de droite de pente positive lorsque les deux signaux sont en phase.