F. Etude d'une canalisation domestique d'amenée d'eau.

On considère un écoulement incompressible, laminaire et en régime permanent d'eau liquide dans un tube cylindrique d'axe horizontal Oz et de diamètre D. On note ρ sa masse volumique et η sa viscosité, supposées constantes.

On néglige l'effet de la pesanteur. On rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit : $\overrightarrow{f_v} = \eta \Delta \vec{v}$

34) Quelle(s) hypothèse(s) nous conduit (conduisent) à chercher l'expression de $\vec{v}$ sous la forme : $\vec{v} = v(r,z)\overrightarrow{e_z}$?

35) Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire que la vitesse $v(r,z)$ ne dépend pas de z. On la notera donc $v(r)$ par la suite.

36) Par application de l'équation de Navier Stokes : $\rho \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(P) + \eta \Delta \vec{v}$:

a) montrer que la pression P ne dépend pas de r,

b) montrer que la fonction $v(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{\eta}{r}\left[\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)\right] = K$, où K est une constante supposée connue.

37) En remarquant que $v(r)$ reste finie et en précisant une autre condition aux limites, déterminer l'expression de $v(r)$ en fonction de K, η, r et D. Quel est le signe de K lorsque $v > 0$?

38) Déterminer l'expression du débit volumique, noté Q_v, en fonction de K, η et D.

39) A quelle distance r de l'axe la vitesse est-elle maximale ? En notant v_0 cette vitesse maximale, exprimer v_0 en fonction de Q_v et D.

40) Le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de deux termes de même dimension. Comment se nomment ces deux termes ?
Préciser alors l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ, D, η et Q_v. On admettra que la vitesse caractéristique de l'écoulement correspond à la vitesse moyenne : $U = \dfrac{4Q_v}{\pi \mathrm{D}^2}$.

41) Application numérique : évaluer le débit maximal $Q_{v_{\max}}$ et la valeur maximale de v_0 correspondante, notée $v_{0\max}$, pour que l'écoulement de l'eau dans notre canalisation de diamètre D = 0,05 m reste laminaire. Conclure.

G. Ecoulement dans un canal, mesure de débit à l'aide d'un tube de Pitot.

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide assimilable à un fluide parfait, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal Oxy. Sa hauteur h = 50 cm est constante selon z. Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de L_1 = 50 cm à $L_2 = \frac{2}{3} L_1$ = 33 cm.

Etude qualitative :

La figure 2 représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement.

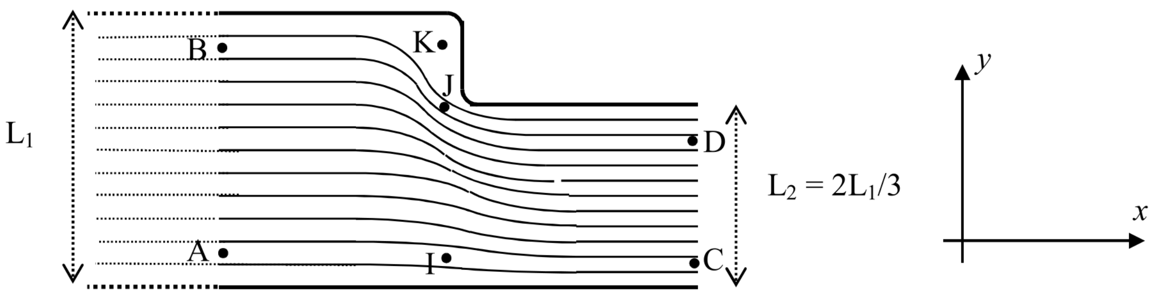

Figure 2

42) Au vu de la figure 2, comparer v(J), v(K), v(A) et v(C).

43) La vitesse au point A, mesurée par un tube de Pitot est de 0,5 m.s^{-1}. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse v(C).

Données numériques et constantes physiques :

Masse volumique de l'eau liquide : 10^3 kg.m^{-3}.
Viscosité de l'eau liquide : 1,7.10^{-3} Pa.s.

Quelques ordres de grandeurs :

Valeur critique du nombre de Reynolds : 2300.
Débit maximal d'une canalisation domestique : 5 m^3/h.
Débit usuel d'une canalisation d'eau domestique : 200 L/h.

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$gr\vec{a}d(U) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$div(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$r\vec{o}t(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(a_r)}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta\vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2}(a_r + 2\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta})\right)\vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2}(a_\theta - 2\frac{\partial a_r}{\partial \theta})\right)\vec{u}_\theta + (\Delta a_z)\vec{u}_z$$

$$r\vec{o}t[r\vec{o}t(\vec{a})] = gr\vec{a}d[div(\vec{a})] - \Delta\vec{a}\,.$$