À propos des araignées

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont repertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à 70 μm. À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques ...

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches ($\vec{v}$) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\widehat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

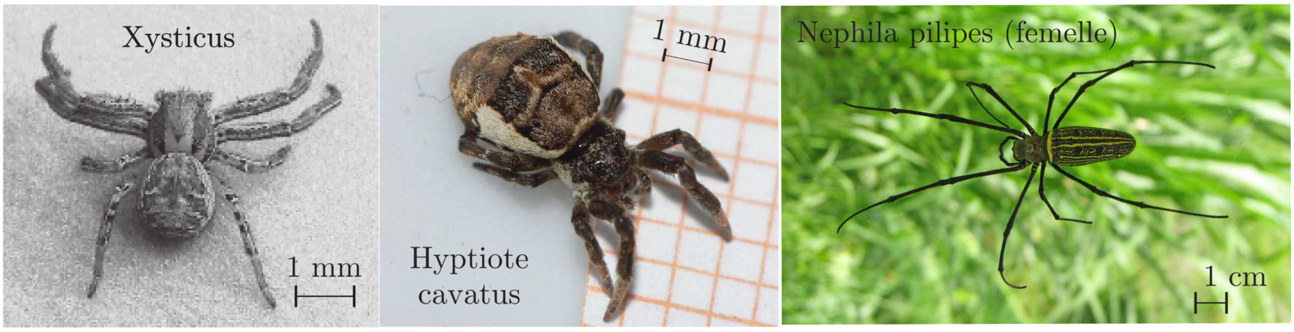

FIGURE 1 – *Xysticus sp.* est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

III Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r, mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ, autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x,t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\widehat{e}_x + T_z(x,t)\widehat{e}_z$.

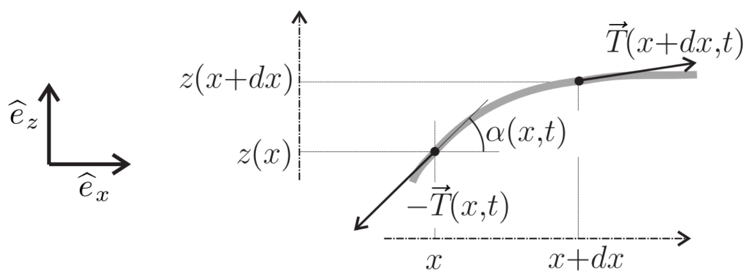

FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\dfrac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

❑ – **15**. On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds, $\cos[\alpha(x,t)]$ et $\sin[\alpha(x,t)]$ en fonction de dx et $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.
En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x.
Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

❏ – **16**. Montrer que le déplacement du fil $z(x,t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,. \tag{1}$$

On exprimera c en fonction de T et μ. Que représente cette grandeur physique ?

❏ – **17**. Montrer que des fonctions de la forme $z(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g.

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoidal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des amplitudes complexes.

❏ – **18**. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x,t)$.
En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises.
Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

❏ – **19**. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0{,}5\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{m}^{-1}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?
Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module de Young E. L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de rayon a devient alors :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4} \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{2}$$

❏ – **20**. En supposant que la déformation $z(x,t)$ de la corde est de la même forme que précédemment, établir la relation de dispersion donnant k en fonction de ω et des paramètres du problème.
Montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell}\sqrt{1 + Bn^2}\,, \tag{3}$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E, T, ℓ et a.
Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée $E = 6{,}0\,\mathrm{GPa}$ et $a = 350\,\mu\mathrm{m}$ et que pour une corde classique $E = 2{,}5\,\mathrm{GPa}$ et $a = 400\,\mu\mathrm{m}$, que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

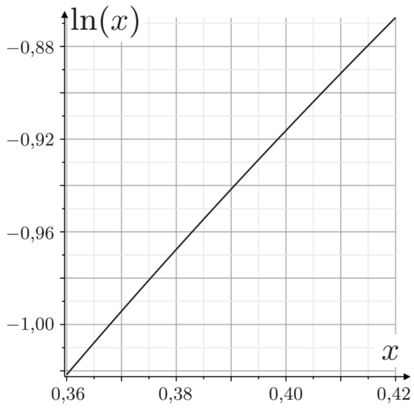

FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0{,}36; 0{,}42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\widehat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\widehat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{e}_z$$

Rayon terrestre	$R_\mathrm{t} = 6400\,\mathrm{km}$
Permitivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12} \simeq \dfrac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_\mathrm{e} = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

FIN DE L'ÉPREUVE