Physique des ondes
Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Établir l'équation d'onde dans le cas d'une corde infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
- ❑ Identifier une équation de d'Alembert.
- ❑ Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu.
- ❑ Citer des exemples de solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle.
- ❑ Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert.
- ❑ Utiliser la notation complexe.
- ❑ Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase.
- ❑ Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
- ❑ Justifier et exploiter des conditions aux limites.
- ❑ Définir et décrire les modes propres.
- ❑ Construire une solution quelconque par superposition de modes propres.
- ❑ Associer mode propre et résonance en régime forcé.
- ❑ Décrire un câble coaxial par un modèle à constantes réparties sans perte.
- ❑ Établir les équations de propagation dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique.
- ❑ Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial.
- ❑ Étudier la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.
- ❑ Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels.
- ❑ Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur.
- ❑ Écrire les équations locales linéarisées : conservation de la masse, équation thermodynamique, équation de la dynamique.
- ❑ Établir l'équation de propagation de la surpression formulée avec l'opérateur laplacien.
- ❑ Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait.
- ❑ Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.
- ❑ Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde.
- ❑ Définir l'intensité sonore et le niveau d'intensité sonore.
- ❑ Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
- ❑ Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore.
- ❑ Discuter de la validité du modèle de l'onde plane en relation avec le phénomène de diffraction.
- ❑ Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
- ❑ Établir et utiliser l'impédance acoustique définie comme le rapport de la surpression sur le débit volumique ou comme le rapport de la surpression sur la vitesse.
- ❑ Commenter l'expression fournie de la surpression générée par une sphère pulsante : atténuation géométrique, structure locale.
- ❑ Mettre en œuvre une détection synchrone pour mesurer une vitesse par décalage Doppler.
- ❑ Identifier les différents termes de l'équation locale de Poynting.
- ❑ Exprimer la puissance rayonnée à travers une surface à l'aide du vecteur de Poynting.
- ❑ Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ❑ Établir les équations de propagation.
- ❑ Utiliser la notation complexe.
- ❑ Établir la relation entre le vecteur champ électrique, le vecteur champ magnétique et le vecteur d'onde.
- ❑ Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde.
- ❑ Associer le flux du vecteur de Poynting à un flux de photons en utilisant la relation d'Einstein-Planck.
- ❑ Citer quelques ordres de grandeur de flux énergétiques surfaciques moyens (laser hélium-néon, flux solaire).

- ❏ Utiliser le principe de superposition d'ondes planes progressives harmoniques.
- ❏ Identifier l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement.
- ❏ Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.

Résumé du cours

1 Différents phénomènes régis par la même équation

1.1 Onde dans une corde

Les cordes peuvent être le siège d'ondes transversales.
La corde est un milieu unidimensionnel. Une seule direction de propagation est possible.

Schéma Corde

Équation de propagation [1]

Hypothèses

- La corde est infiniment flexible.
- Les déplacements sont faibles et transverses.
- Les effets de la gravité sont négligés.
- Les frottements sont négligés.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Avec

- $y(x,t)$ la hauteur de la corde à l'abscisse x et à l'instant t (en m)
- $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la célérité de l'onde (en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)
- T la tension dans la corde (en N)
- μ la masse linéique de la corde (en $\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$)

Cette équation aux dérivées partielles s'appelle **équation de d'Alembert**.

1.2 Ondes dans un cable coaxial

Un cable coaxial est constitué de deux conducteurs concentriques (l'âme et la gaine) séparés par un isolant. Le cable coaxial est un milieu unidimensionnel.

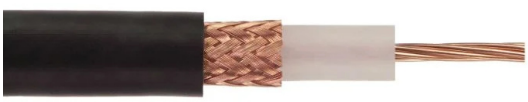


Fig. 1 : Photographie d'un cable coaxial.

Schéma Cable coaxial

Exemple

Les cables d'antennes (satellite, TNT, wifi, ...) sont souvent des cables coaxiaux.

Les cables coaxiaux étant parfois longs, les conditions de l'ARQS ne sont pas toujours remplies. Des ondes de tension et de courant peuvent s'y propager.

Dans le modèle à constantes réparties sans pertes, on étudie une portion mésoscopique de cable, en considérant son inductance linéique et sa capacité linéique. Dans le modèle à constantes réparties sans pertes, le conducteur a une résistance nulle et l'insolant une conductance nulle.

Schéma Portion mésoscopique de cable dans le modèle à constantes réparties

Equation de propagation

Hypothèses Dans le modèle à constantes réparties.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0 \end{cases}$$

Avec

- $u(x,t)$ la tension à l'abscisse x et à l'instant t (en V)
- $i(x,t)$ l'intensité du courant à l'abscisse x et à l'instant t (en A)
- $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ la célérité de l'onde (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- Λ l'inductance linéique du cable (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- Γ la capacité linéique du cable (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

La propagation d'une onde de tension ou de courant dans un cable coaxial est régi par une équation de d'Alembert.

Application

Calculer la vitesse de propagation d'une onde dans un cable coaxial de capacité linéique $40\,\mathrm{pF \cdot m^{-1}}$ et d'inductance propre linéique $0{,}4\,\mathrm{\mu H \cdot m^{-1}}$.

1.3 Ondes sonores

1.3.1 Le son

Le son est une onde longitudinale de compression dans un fluide. Le son se propage dans un milieu tridimensionnel.

Lors du passage d'une onde sonore, la pression et la vitesse des particules de fluide oscillent.

SCHÉMA Domaines fréquentiels

1.3.2 Approximation acourstique

Dans l'approximation acoustique, l'amplitude de l'onde sonore est faible.

Approximation acoustique

Hypothèses Le fluide est macroscopiquement au repos.

$P(M,t) = P_0 + P_1(M,t)$ avec $|P_1| \ll P_0$
$\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$ avec $|\mu_1| \ll \mu_0$
$\vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t)$ avec $\|\vec{v}_1\| \ll c$

Avec

- $P(M,t)$ la pression (en Pa)
- P_0 la pression ambiante[a] (en Pa)
- $P_1(M,t)$ la **surpression** causée par l'onde (en Pa)
- $\mu(M,t)$ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la masse volumique ambiante (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $\mu_1(M,t)$ la sur-masse volumique causée par l'onde (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{v}(M,t)$ la vitesse du fluide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- c la célérité de l'onde

[a] Ambiante = en l'absence d'onde.

1.3.3 Équation de propagation

Trois équations couplées sont nécessaires pour obtenir l'équation de propagation des ondes sonores.

Conservation de la masse [4]

Hypothèses

- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{v}_1$$

Avec

- μ_0 la masse volumique ambiante (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $\mu_1(M,t)$ la sur-masse volumique causée par l'onde (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{v}(M,t)$ la vitesse du fluide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Équation thermodynamique [5]

Hypothèses

- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.
- L'évolution est adiabatique réversible.

$$\mu_1 = \chi_S \mu_0 P_1$$

Avec

- $\mu_1(M,t)$ la sur-masse volumique causée par l'onde (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la masse volumique ambiante (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $P_1(M,t)$ la surpression causée par l'onde (en Pa)
- $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left.\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_S$ le coefficient de compressibilité isentropique (en $\mathrm{Pa^{-1}}$)

Équation de la dynamique [6]

Hypothèses

- En l'absence de force de viscosité.
- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.
- L'action de la gravité est négligée.

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}} P_1$$

Avec

- μ_0 la masse volumique ambiante (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{v}(M,t)$ la vitesse du fluide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- $P_1(M,t)$ la surpression causée par l'onde (en Pa)

Équation de propagation de la surpression pour une onde sonore [7]

Hypothèses

- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.
- L'évolution est adiabatique réversible.

$$\Delta P_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

Avec

- $P_1(M,t)$ la surpression causée par l'onde (en Pa)
- $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$ la célérité de l'onde (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- μ_0 la masse volumique ambiante (en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$)
- χ_S le coefficient de compressibilité isentropique (en $\mathrm{Pa^{-1}}$)

La surpression vérifier une équation de d'Alembert. On admet que la vitesse vérifie une équation de d'Alembert analogue.

1.3.4 Célérité

Célérité d'une onde sonore dans un gaz parfait [8]

Hypothèses

- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.
- L'évolution est adiabatique réversible.
- Le gaz est parfait.

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

Avec

- c la célérité de l'onde (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- R la constante des gaz parfaits (en $\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$)
- T la température (en K)
- M la masse molaire (en $\mathrm{mol \cdot L^{-1}}$)

Application [9]

Déterminer la célérité d'une onde sonore dans l'air, considéré comme un gaz parfait diatomique, à la température de référence. L'air est constitué de 80 % de diazote ($M(N) = 14\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) et de 20 % de dioxygène ($M(O) = 16\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$).

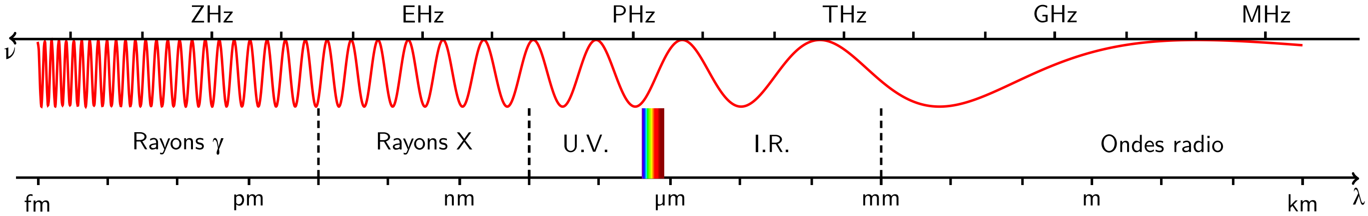
La célérité d'une onde sonore dans l'eau est environ $c_{\text{eau}} = 1400\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1.4 Ondes électromagnétiques dans le vide

Les ondes électromagnétique sont la variation des champs électrique et magnétique. Les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans le vide ou dans un milieu.

1.4.1 Spectre électromagnétique

Les ondes radio, la lumière visible et invisible, le rayons X et gamma sont des ondes électromagnétiques.



1.4.2 Équation de propoagation

Les équations de Maxwell permettent de déterminer l'équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs électrique et magnétique.

Équation de porpagation d'une onde électromagnétique 10

Hypothèses Dans le vide

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$
$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{B}$ le champ magnétique (en H)
- $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ la célérité de l'onde (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

Les champs électrique et magnétique obéissent à la même équation de d'Alembert.

Application 11

Vérifier l'homogénéïté de l'expression $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

2 Solutions de l'équation de d'Alembert

Il existe différentes familles de solution des équations de d'Alembert.

2.1 Ondes progressives

Dans un milieu unidimensionnel, une onde progressive est une fonction de $x + ct$ (si elle se propage dans le sens des x décroissants) ou de $x - ct$ (si elle se propage dans le sens des x croissants).

Exemple

$A\cos(k(x + ct))$, $B\sin(\omega t - \frac{\omega}{c}x)$, $C\exp(\frac{-x-ct}{\lambda})$ sont ondes progressives.

Une onde est solution de l'équation de d'Alembert si et seulement si c'est une combinaison linéaire d'ondes progressives.

Application 12

Montrer qu'une superposition d'onde progressive est solution de l'équation de d'Alembert.

2.2 Forme des surfaces d'onde

Dans les milieux tridimensionnels, les ondes peuvent *a priori* dépendre des 3 variables d'espace.

Une surface d'onde est une surface sur laquelle la phase d'une onde est constante. A t fixé, l'onde est la même en tout point d'une surface d'onde.

Pour une onde plane, les surfaces d'ondes sont des plans. Dans un repère cartésien bien choisi, une onde plane peut s'écrire comme une fonction de t et d'une seule coordonnée (x, y ou z).

Pour une onde cylindrique, les surfaces d'onde sont des cylindres. Dans un repère cylindrique bien choisi, une onde cylindrique peut s'écrire comme une fonction de t et de r.

Pour une onde sphérique, les surfaces d'ondes sont des sphères. Dans un repère sphérique bien choisi, une onde sphérique peut s'écrire comme une fonction de t et de r.

Application 13

Dire si les ondes suivantes sont des ondes planes, cylindriques ou sphériques : $P_1 = A\cos(\omega t - kx)$; $\vec{E} = B\sin(\omega t - ky)\vec{e_x}$; $P_1 = Cf(\omega t + k\sqrt{x^2 + y^2})$; $P_1 = D\cos(\omega t + \vec{k}.\overrightarrow{OM})$; $P_1 = E\cos(\omega t - k\|\overrightarrow{OM}\|)$.

2.3 Notion de polarisation

Pour une onde transversale, la direction de la grandeur est orthogonale à la direction de propagation de l'onde. Pour une onde polarisée rectilignement, la direction de la grandeur reste constante au cours du temps.

Exemple

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_z}$ est une onde polarisée rectilignement.

Un polariseur est un dispositif permettant de changer la direction de polarisation.

2.4 Ondes (planes) progressives harmoniques

Une onde (plane) progressive harmonique[1] est un cas particulier d'onde progressive pour laquelle la fonction de $x - ct$ est une fonction sinusoïdale.

Onde (plane) progressive harmonique

$$y(M,t) = y_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$$

Avec

- y_0 l'amplitude
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- T la période (en s)
- $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ le vecteur d'onde (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{n}$ un vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde.
- λ la longueur d'onde (en m)
- ϕ la phase (en rad)

Pour une onde dans un milieu unidimensionnel, une onde progressive harmonique peut s'écrire $y(M,t) = y_0 \cos(\omega t - \pm^2 kx + \phi)$. k s'appelle le nombre d'onde.

Il est possible d'associer à l'OPH $y(M,t) = y_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$ la grandeur complexe $\underline{y}(M,t) = y_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)}$ afin de simplifier les calculs.

Dérivées pour une OP(P)H 14

Hypothèses $\underline{y}$ et $\underline{\vec{A}}$ sont les représentations complexes d'OPH quelconques.

$$\frac{\partial \underline{y}}{\partial t} = j\omega \underline{y}$$
$$\mathrm{div}\,\underline{\vec{A}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{A}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\underline{y} = -j\vec{k}\underline{y}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{A}} = -j\vec{k} \wedge \overrightarrow{underline A}$$
$$\Delta \underline{y} = -k^2 \underline{y}$$
$$\Delta \underline{\vec{A}} = -k^2 \underline{\vec{A}}$$

L'expression des dérivées spatiales peut être résumée par $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$.

[1]On parle d'OPH pour une onde dans un milieu unidimensionnel (corde, cable coaxial, ...). Dans un milieu tridimensionnel (ondes sonores, électromagnétiques, ...), il faut également préciser la forme des surfaces d'onde (planes ici).

[2]Le signe + (resp. −) correspond à une onde se propageant dans le sens décroissants (resp. croissant).

2.4.1 Caractère longitudinal des ondes sonores

Pour les ondes sonores, la direction de la perturbation est colinéaire avec la direction de propagation de l'onde. On dit que les ondes sonores sont longitudinales.

Caractère longitudinal d'une onde sonore 15

Hypothèses

- Dans l'approximation acoustique.
- Le fluide est macroscopiquement au repos.
- L'évolution est adiabatique réversible.

Les ondes sonores sont des ondes longitudinales.

2.4.2 Relation de dispersion

L'équation de d'Alembert impose une relations entre le vecteur d'onde et la pulsation, appelée relation de dispersion.

Relation de dispersion 16

Hypothèses

- L'onde vérifie l'équation de d'Alembert.
- L'onde est une O(P)PH.

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2$$

Avec

- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- $\vec{k}$ le vecteur d'onde (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- c la célérité (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

2.4.3 Vitesse de phase

La vitesse de phase est la vitesse à laquelle la phase se propage.

Vitesse de phase 17

Hypothèses L'onde est une OPH.

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

Avec

- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- k le nombre d'onde (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

Vitesse de phase 18

Hypothèses

- L'onde est une OPH.
- L'onde vérifie l'équation de d'Alembert.

$$v_\phi = \pm c$$

Avec

- v_ϕ la vitesse de phase (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- c célérité (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

2.4.4 Superposition d'OPH

L'équation de d'Alembert est linéaire donc si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation de d'Alembert, $\alpha y_1 + \mu y_2$ est également solution.

Toute onde périodique peut être décomposée en série de Fourier d'OPH. Toute onde peut être décomposée en intégrale de Fourier d'OPH.

Connaitre la propagation d'OPH permet dont de connaitre la propagation de n'importe quelle onde.

2.5 Ondes stationnaires

Une onde stationnaire est une onde ne se propageant pas. La position d'un sommet ou d'un creux ne change pas au cours du temps.

Les points où l'amplitude est nulle s'appellent des nœuds. Les points où l'amplitude est maximale s'appellent des ventres.

Souvent, les ondes stationnaires peuvent s'écrire comme un produit d'une fonction de t et d'une fonction de l'espace (de x par exemple).

Les ondes (planes) stationnaires harmoniques s'écrivent $A\cos(\omega t + \phi)\cos(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} + \varphi)$.

2.6 Quelle solution privilégier ?

Dans des milieux infinis, les solutions progressives sont à privilégier.

Dans un milieu fini ou semi-infini, les solutions stationnaires sont à privilégier.

3 Conditions aux limites dans un milieu fini ou semi-infini

Dans les milieux semi-infinis, il y a un "bord" qui impose une condition aux limites à l'onde.

Dans les milieux finis, il y a deux "bord" qui imposent deux conditions aux limites à l'onde.

3.1 Condition fixe

Une condition aux limites fixes impose une valeur constante (souvent 0) à l'onde en un point.

3.1.1 Conditions fixes pour la corde

Schéma Conditions fixes pour la corde

3.1.2 Conditions fixes pour le cable coaxial

Une condition fixe pour un cable coaxial consiste en un court-circuit ($u = 0$) ou un circuit ouvert ($i = 0$).

Schéma Conditions fixes pour un cable coaxial

3.1.3 Conditions fixes pour les ondes sonores

Les conditions fixes sont imposées sur la surpression ou la vitesse pour une onde sonore.

Exemple

Dans un tuyau de flute de pan, l'extrémité fermée impose une vitesse nulle et l'extrémité ouvert impose une pression égale à la pression atmosphérique, soit une surpression nulle.

3.1.4 Conditions fixes pour les ondes électromagnétiques

Dans un métal parfait, la conductivité est infinie, donc la loi d'Ohm impose que le champ électrique est nul à l'intérieur.

Les composantes du champ orthogonale à une interface sont continues.

Ainsi, un métal parfait constitue une condition aux limites fixe pour le champ électrique d'une onde électromagnétique de direction de propagation orthogonale à celui-ci.

Schéma Condition fixe pour une onde électromagnétique.

3.1.5 Réflexion et onde stationnaire

Une onde progressive incidente se réfléchi sur une condition aux limites fixe.

Une OPH incidente se réfléchie sur une condition aux limites fixe et donne ainsi une onde stationnaire.

Réflexion d'une onde sur une condition fixe [19]

Hypothèses

- L'onde incidente est une OPH $\underline{y_i} = Y_{0,i} e^{j(\omega_i t + k_i x)}$.
- L'onde réfléchie est une OPH $\underline{y_r} = \underline{Y_{0,r}} e^{j(\omega_r t - k_r x)}$.
- La condition aux limites impose $\forall t, y(0,t) = 0$.

$$y(x,t) = 2Y_{0,i} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

Cette relation montre qu'un onde stationnaire peut s'écrire comme la somme de deux ondes progressives.

Application [20]

Montrer qu'une OPH peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires harmoniques.

3.2 Condition imposée

Des sources (pot vibrant, générateur, membrane vibrante, ...) peuvent imposer la valeur de l'onde en un point.

3.3 Deux conditions aux limites : quantification des modes propres

Dans un milieu fini, deux conditions aux limites sont imposées.

Si deux conditions aux limites fixes sont imposées, seules certaines ondes peuvent se propager, on parle de modes propres.

Modes propres [21]

Hypothèses

- $y(x,t)$ est solution d'une équation de d'Alembert.
- y vérifie une condition aux limites fixe en L : $\forall t, y(x=L,t)=0$[a]
- y vérifie une condition aux limites imposée en 0 : $\forall t, y(x=0,t)=a_0\cos(\omega_0 t)$[b]
- y est cherchée sous la forme d'une superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie.

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$$

Avec

- ω_n la n-ième pulsation propre (en $\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$)
- $n \in \mathbb{N}$
- c la célérité de l'onde (en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$)
- L la distance entre les deux conditions aux limités fixes (en m).

[a] Exemple : corde attachée, cable coaxial court-circuité, onde sonore sur un mur, ondes électromagnétique sur un plan infiniment conducteurs.

[b] Exemple : corde sur un pot vibrant, cable coaxial sur un générateur, onde sonore avec un haut parleur, ondes électromagnétique avec des charges oscillantes.

Lorsqu'un milieu fini est excité à une fréquence proche d'un mode propre, l'amplitude de l'onde devient très grande. On parle de résonance.

4 Relation entre grandeurs couplées

Les deux grandeurs couplées d'une onde ne sont pas indépendantes. Elles sont liées par des relations simples pour des OPH.

4.1 Impédance caractéristique d'un cable coaxial

Dans un cable coaxial et pour une OPH, le courant et la tension sont proportionnels.

4.1.1 Lien entre courant et tension

Impédance caractéristique ♥ ✎[22]

Hypothèses Pour une OPH.

$$u = \pm^{a} Z_c i$$

[a] + pour une OPH dans le sens des x croissants, - pour une OPH dans le sens de x décroissants.

Avec

- u la tension (en V)
- i le courant (en A)
- $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$ l'impédance caractéristique (en Ω)

4.1.2 Réflexion sur une impédance terminale

Lorsqu'une OPH incidente se réfléchit sur une impédance terminale, l'amplitude de l'onde réfléchie dépend de cette impédance terminale et de l'impédance caractéristique du cable.

Schéma Cable coaxial fermé sur une impédance terminale

Coefficient de réflextion sur une impédance terminale ✎[23]

Hypothèses

- L'onde incidente est une OPH : $u_i = u_{i,0}\cos(\omega_i t - k_i x)$.
- L'onde réfléchie est une OPH : $u_r = u_{r,0}\cos(\omega_r t + k_r x + \phi)$.
- Le cable est fermé sur une résistance R en $x = 0$.

$$\frac{u_{r,0}}{u_{i,0}} = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$$

Avec

- $u_{r,0}$ l'amplitude de l'onde réfléchie (en V)
- $u_{i,0}$ l'amplitude de l'onde incidente (en V)
- R la résistance terminale (en Ω)
- Z_c l'impédance caractéristique du cable (en Ω)

Lorsque l'impédance terminale est égale à l'impédance caractéristique du cable, il n'y a pas d'onde réfléchie.

Exemple

Cette propriété est utilisée dans les téléviseurs : la prise d'antenne est connectée à une résistance égale à l'impedance caractéristique du cable d'antenne afin qu'il n'y ait pas de réflexion dans le cable d'antenne.

4.2 Impédance acoustique

Par analogie avec le cable coaxial, on définit une impédance caractéristique.

Impédance acoustique ♥ ✎[24]

Hypothèses Pour une OPPH.

$$P_1 = Z_c \vec{v}.\vec{n}$$

Avec

- P_1 le champ de surpression (en Pa)
- $\vec{v}$ le champ de vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de même sens et direction que la propagation de l'onde (sans unité)
- $Z_c = \mu_0 c$ l'impédance acoustique (en $\mathrm{Pa \cdot s \cdot m^{-1}}$)

4.3 Relation de structure

L'équation de Maxwell-Faraday fournit une relation entre les champs électrique et magnétique pour une OPPH.

Relation de structure ♥ ✎[25]

Hypothèses

- Pour une OPPH.
- Dans le vide.

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Avec

- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)
- $\vec{k}$ le vecteur d'onde (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

5 Aspectes énergétiques

5.1 Énergie acoustique

Comme toute onde, les ondes acoustiques peuvent transporter de l'énergie.

5.1.1 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting est le vecteur densité volumique d'énergie transportée par l'onde.

Vecteur de Poynting ♥ ✎[26]

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}$$

Avec

- $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting ($\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- P_1 la surpression (en Pa)
- $\vec{v}$ le champ de vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

5.1.2 Intensité acoustique

L'intensité acoustique ou intensité sonore est la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting.

Intensité acoustique ♥

$$I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle$$

Avec

- I l'intensité acoustique (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting ($\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)

Les valeurs usuelles de l'intensité sonore s'étendent sur plusieurs ordres de grandeurs, on introduit donc le niveau sonore.

Niveau sonore

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Avec

- I l'intensité acoustique (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- $I_0 = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ l'intensité acoustique de référence

L'intensité acoustique de référence I_0 est le plus faible son discernable par l'oreille humaine.

Exemple

Quelques ordres de grandeur de niveaux sonores :

- Pièce calme : 20 dB
- Conversation à 1 m : 60 dB
- Rue animée (déclenchement du réflexe stapédien[a]) : 80 dB
- Avion à quelques mètres (seuil de douleur) : 120 dB

[a] Le réflexe stapédien est l'activation d'un muscle qui protège l'oreille interne. Ce muscle peut fatiguer, il est donc recommandé de ne pas avoir une exposition prolongée à ce niveau sonore.

5.1.3 Retour sur les hypothèses de l'approximation acoustique

Les niveaux sonores courants permettent de revenir sur les hypothèses de l'approximation acoustique pour les vérifier.

Hypothèses de l'approximation acoustique 27

Hypothèses

- Pour un OPPH.
- Dans l'air à la température de référence.

L'évolution est isentropique.

$$P_1 \ll P_0$$
$$\|\vec{v}\| \ll c$$

5.1.4 Forme d'une onde sphérique

Une onde sphérique est une onde dont les surfaces d'onde sont des sphères. Une onde sphérique dépend de la seule variable d'espace r.

Forme d'une onde sphérique

Hypothèses L'onde est sphérique.

$$P_1 = \frac{f(r-ct)}{r} + \frac{g(r+ct)}{r}$$

Avec

- P_1 la surpression (en Pa)
- f et g des fonctions quelconques

Une onde sphérique s'atténue lors de sa propagation. La puissance de l'onde s'étale sur une surface de plus en plus large.

Application 28

Montrer que la puissance moyenne traverçant une sphère de rayon $r \gg \frac{1}{k}$ ne dépend pas de r.

5.2 Énergie électromagnétique

5.2.1 Conservation de l'énergie

Le vecteur de Poynting désigne le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique.

Équation locale de conservation de l'énergie 29

Hypothèses L'onde peut communiquer de la puissance à des porteurs de charge.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Pi} - \overrightarrow{j_{\text{élec}}}.\vec{E}$$

Avec

- w la densité volumique d'énergie électromagnétique (en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$)
- $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting électromagnétique (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- $\overrightarrow{j_{\text{élec}}}$ le vecteur densité de courant électrique (en $\mathrm{A \cdot m^{-2}}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en V)

Ce bilan d'énergie permet de déterminer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie.

Expression du vecteur de Poynting et de la densité volumique d'énergie 30

Hypothèses L'onde peut communiquer de la puissance à des porteurs de charge.

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$
$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Avec

- w la densité volumique d'énergie électromagnétique (en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$)
- $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting électromagnétique (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{B}$ le champ magnétique (en T)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

5.2.2 Flux de photons

Un photon est une particule élémentaire sans masse qui transporte l'énergie des ondes électromagnétiques.

Relation de Planck-Einstein

$$\mathcal{E} = h\nu$$

Avec

- $\mathcal{E}$ l'énergie d'un photon (en J)
- $h \approx 6{,}63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ la constante de Plank
- ν la fréquence de l'onde (en Hz)

Application 31

Déterminer le débit de photons d'un pointeur laser rouge de puissance 5 mW.

5.2.3 Énergie d'une OPPH

Densité volumique d'énergie d'une OPPH 32

Hypothèses

- Dans le vide.
- L'onde est une OPPH : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_y}$

$$\langle w \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Avec

- w la densité volumique d'énergie électromagnétique (en $\mathrm{J \cdot m^{-3}}$)
- E_0 l'amplitude de l'onde (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

Pour une OPPH, l'énergie est équirépartie entre la forme magnétique et la forme électrique.

Vecteur de Poynting 33

Hypothèses

- Dans le vide.
- L'onde est une OPPH : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e_y}$

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0}\vec{e_x}$$

Avec

- $\vec{Pi}$ le vecteur de Poynting électromagnétique (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- E_0 l'amplitude de l'onde (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- c la célérité de la lumière dans le vide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

La direction de propagation de l'énergie est la même que la direction de propagation de l'onde.

TD

1 Corde vibrante conductrice

On étudie les petits mouvements transversaux d'une corde métallique de longueur L fixée en ses extrémités d'abscisse $x = 0$ et $x = L$. Un point de la corde, situé à l'abscisse x à la date t au repos, se déplace de $z(x,t)$ au passage de l'onde. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ et plongée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}(x) = B_0 \sin(\frac{\pi x}{L})\overrightarrow{u_y}$. On rappelle que la force de Laplace qui s'exerce sur un élément de longueur $\overrightarrow{dl}$ est $\overrightarrow{df} = i\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$.

1. Établir l'équation du mouvement de la corde sous la forme
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{i_0 B_0}{\mu} \cos(\omega t) \sin(\frac{\pi x}{L})$$
où c est une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.
2. On cherche une solution en $z(x,t) = z_0 \sin(\frac{\pi x}{L}) \cos(\omega t)$ en régime sinusoïdal forcé. Commenter le choix de cette expression.
3. Déterminer l'expression de z_0. Que se passe-t-il quand ω tend vers $\frac{\pi c}{L}$? La modélisation du phénomène est-elle toujours valable ? Expliquer.

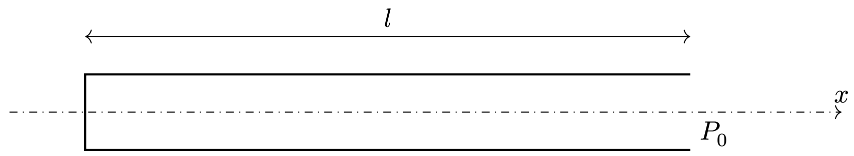
2 Câble coaxial alimenté par un générateur

A coaxial line of length L is powered at one end by a voltage source $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. The other end is left open.

1. Ascertain the voltage wave $u(x,t)$ and the current wave $i(x,t)$.
2. For some values of ω, the amplitude of u and i are very important. Explain why and for determine the values of ω for which this happens.

3 Modèle d'une clarinette

Une clarinette est modélisée par un tuyau de section S et de longueur l. Il contient un fluide pour lequel la célérité des ondes sonores est c. Une extrémité du tuyau est fixe alors que l'autre est ouverte sur l'atmosphère, qui y impose la pression P_0. Ce modèle simpliste permet d'aboutir aux fréquences émises par l'instrument, il s'applique aussi au saxophone, basson, tuyau d'orgue, ...



Au repos, la pression vaut P_0 et la masse volumique ρ_0 dans le fluide de la flute. Les effets de la pesanteur sont négligés. On se place dans l'approximation acoustique.

Le musicien injecte à une extrémité du tuyau une onde sonore plane, il s'établit alors une onde stationnaire modélisée par $P(x,t) = A_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$.

1. Pourquoi modéliser l'onde sonore par une onde stationnaire ?
2. Établir l'expression du champ de vitesse dans la clarinette. A-t-on $P(x,t) = Zv(x,t)$, où $Z = \rho_0 c$?
3. Quelles sont les deux conditions aux limites imposées par l'atmosphère ?
4. Établir quelles pulsations peuvent être jouées avec cet instrument.
5. La note fondamentale d'une flute de longueur l est $\omega_f = \frac{\pi c}{l}$. Comparer la hauteur de son d'une flute et d'une clarinette de même longueur.

4 Modes propres dans une cavité sphérique

Un gaz est contenu à l'intérieur d'une sphère rigide de rayon R. Une onde sonore sphérique se propage dans la sphère, décrite par la surpression $P(r,t)$ et le champ des vitesse $v(r,t)\overrightarrow{u_r}$.

On se place dans le cas où $P(rnt) = \frac{A}{r}e^{j(\omega_1 t - k_1 r)} + \frac{B}{r}e^{j(\omega_2 t + k_2 r)}$.

1. Que représente chacun des termes de $P(r,t)$?
2. Que vaut le champ des vitesses $\underline{v}$ associé à l'onde ?
3. Établir le lien entre ω_1 et ω_2 puis A et B. En déduire $\underline{v}$.
4. Établir l'équation portant sur les pulsations pouvant se propager dans la cavité sphérique. Comment les déterminer graphiquement ?

5 Cavité électromagnétique à une dimension

On considère un espace vide compris entre deux plans infiniment conducteurs d'équation $x = 0$ et $x = a$. On y étudie le champ électromagnétique.

1. Établir l'équation de propagation pour $\vec{E}$ dans le vide.
2. On cherche des solutions à variables séparables : $\vec{E} = f(x)g(t)\overrightarrow{u_y}$. Établir les équations différentielles $f''(x) = \alpha f(x)$ et $g''(t) = \alpha c^2 g(t)$, où α est une constante inconnue à ce stade.
3. Quelles sont les conditions aux limites.
4. Calculer $f(x)$. L'exprimer sous la forme d'une fonction de kx où k est une constante qui dépend de α et d'un entier n.
5. En déduire l'expression de $\vec{E}$ à une constante multiplicative près, notée E_0.
6. Quelle est l'analogue mécanique de ce problème électromagnétique ?
7. Établir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$. Que dire des points où $\vec{B}$ est constamment nul, par rapport à ceux où $\vec{E}$ est constamment nul ?