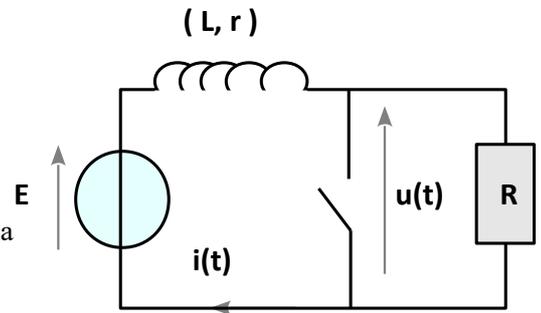


Préparation DS 04

PROBLEME 1 : Phénomène de surtension

On considère le circuit ci-contre où la bobine n'est pas idéale (*bobine idéale d'inductance L en série avec une résistance r*).

Données numériques : $L = 1,0 \text{ H}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $r = 100 \Omega$, $E = 12 \text{ V}$, on néglige la résistance interne du générateur.



Fermeture de l'interrupteur:

L'interrupteur ouvert depuis longtemps est fermé à une date prise comme origine des temps $t = 0$.

1. Quelle est la valeur de l'intensité dans la résistance R pour $t > 0$?
2. Déterminer les valeurs $i(\infty)$ et $i(0^+)$ de $i(t)$. Comparer ces deux valeurs et commenter.
3. Pour $t > 0$, établir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. La mettre sous sa forme canonique et identifier la constante de temps τ du circuit. Calculer la valeur de la constante de temps τ .
4. Déterminer l'expression littérale de $i(t)$ pour $t > 0$ puis son expression numérique. tracer $i(t)$.
5. Calculer l'énergie W_L accumulée dans la bobine au bout de 1s.

Ouverture de l'interrupteur:

L'interrupteur fermé depuis longtemps est ouvert à une nouvelle origine des temps $t=0$.

6. Calculer $u(0^-)$ et $u(0^+)$. Commenter.

PROBLEME 2 : Régime libre d'un circuit RLC

Ce problème fait partie d'un sujet de concours plus complet, la figure 1 et le document 1 du sujet initial ne font pas partie du problème 3.

On réalise un circuit RLC série dont le schéma de principe est donné sur la figure 2. Il est constitué :

- d'un générateur basse fréquence (GBF), de résistance interne R_g et de force électromotrice $e(t)$;
- d'une résistance variable R , de valeur comprise entre 0Ω et $10,0k\Omega$;
- d'un condensateur de capacité variable C , de valeur comprise entre $0,01\mu F$ et $1,00\mu F$;
- d'une bobine réelle d'inductance L et de résistance r inconnues.

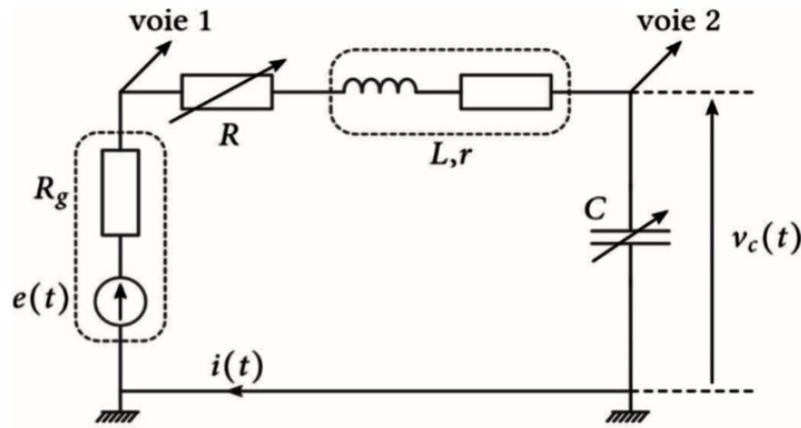


Figure 2 – Circuit RLC série

On pose :

- $R' = R + r + R_g$ la résistance totale du circuit ;
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sa pulsation propre ;
- $Q = \frac{L\omega_0}{R'} = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité correspondant.
- Un extrait des caractéristiques techniques du GBF est donné dans le document 2, ci-après.

Document 2 - Extrait des caractéristiques techniques du GBF

Sortie du signal MAIN OUT	<ul style="list-style-type: none"> - Amplitude réglable en circuit ouvert : de 0 à 20 V (amplitude crête à crête) - Précision : de 0,1 à 20 V < 5 % de 1 mHz à 10 MHz <li style="padding-left: 20px;">$\pm 1,5$ dB pour $f > 10$ MHz ($\pm 0,5$ dB typique) - Impédance : $50\Omega \pm 3\%$ - Tension continue de décalage : réglable de -10 V à $+10$ V en circuit ouvert (OFFSET) - Précision : $\pm 5\%$ de l'amplitude (offset résiduel $< \pm 5$ mV)
----------------------------------	---

Source 2018 : notice Metrix GX 320

1. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par la tension v_C aux bornes du condensateur se met sous la

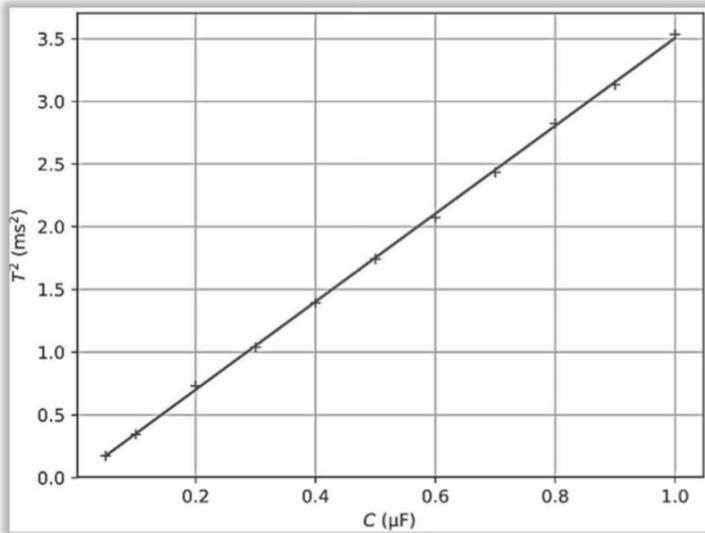
forme :
$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d v_C(t)}{dt} + \omega_0^2 v_C(t) = \omega_0^2 E .$$

On pose $Q > \frac{1}{2}$.

2. En régime libre $e(t)=0$, montrer que la pseudo-période T des oscillations peut s'écrire $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ et

déterminer l'expression littérale de T_0 en fonction des caractéristiques des composants.

3. En déduire que l'on peut écrire $T^2 = \frac{aC}{1-bC}$ et exprimer a et b en fonction des caractéristiques du circuit.
4. La pseudo-période a été mesurée pour différentes valeurs de la capacité C ; la fonction T^2 a été tracée en fonction de C . Une modélisation affine a été superposée à ces données (ci-dessous).



Modélisation affine :

- coefficient de corrélation : 0,999 ;
- ordonnée à l'origine : $-3,0 \cdot 10^{-9}$ SI ;
- pente : 3,3 SI .

Figure 3 – Carré de la pseudo-période en fonction de la capacité

En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine en expliquant la démarche et en justifiant d'éventuelles approximations.

On appelle résistance critique totale, $R'_c = R_c + r + R_g$, la valeur de la résistance totale du circuit permettant d'atteindre le régime critique, la résistance R_c étant simplement appelée résistance critique. Aucune hypothèse n'est faite sur la valeur de Q .

5. Montrer que la résistance critique totale vaut $R'_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

6. Tous les autres paramètres étant fixés, la réponse du circuit à un échelon de tension donne lieu à différents régimes selon la valeur de la résistance variable R . Identifier et nommer les trois régimes associés aux courbes 1, 2 et 3 de la figure 4 (en voie 1 de l'oscilloscope, l'échelon de tension ; en voie 2, la superposition des réponses du circuit).

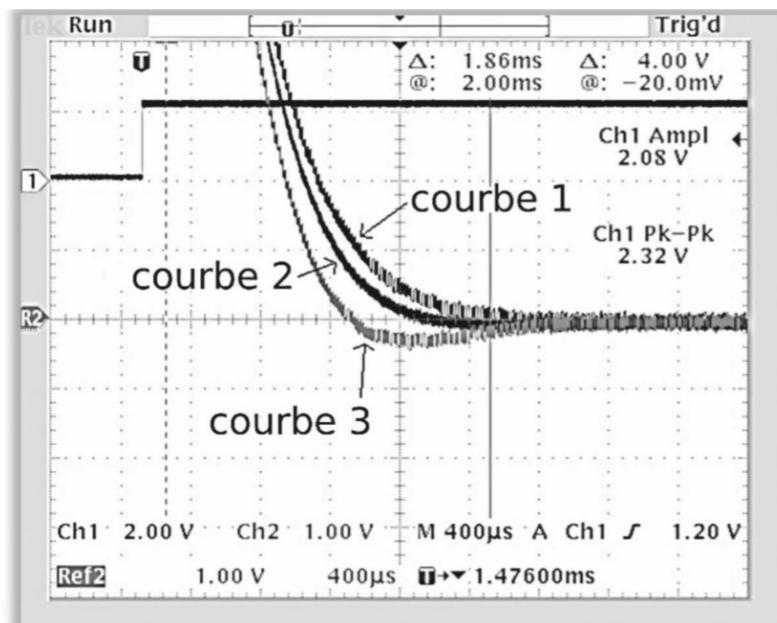
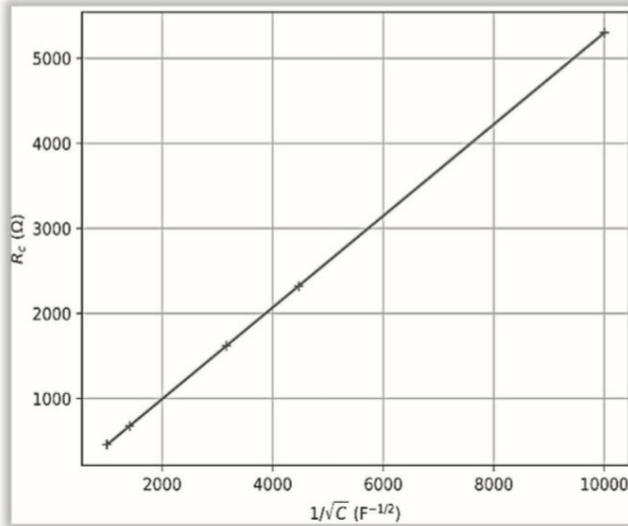


Figure 4 – Superposition des réponses du circuit soumis à un échelon de tension, pour trois valeurs différentes de R

7. La résistance critique $R_c = R'_c - r - R_g$ a été mesurée pour différentes valeurs de C . Déduire du tracé de R_c en fonction de $\frac{1}{\sqrt{C}}$ (figure 5) et du document 2 une estimation de la valeur de r accompagnée de son incertitude.



Modélisation affine :

- coefficient de corrélation : 0,999 ;
- ordonnée à l'origine : - 81 SI ;
- pente : 0,58 SI .

Figure 5 – Résistance critique en fonction de l'inverse de la racine carré de la capacité

8. Afin de valider les mesures précédentes, une dernière courbe a été tracée dont la nature n'est pas précisée et dont la légende a été perdue (figure 6). En précisant votre démarche, expliquer selon vous de quelle courbe il s'agit, comment elle a été réalisée et justifier son éventuelle compatibilité avec les données précédentes.

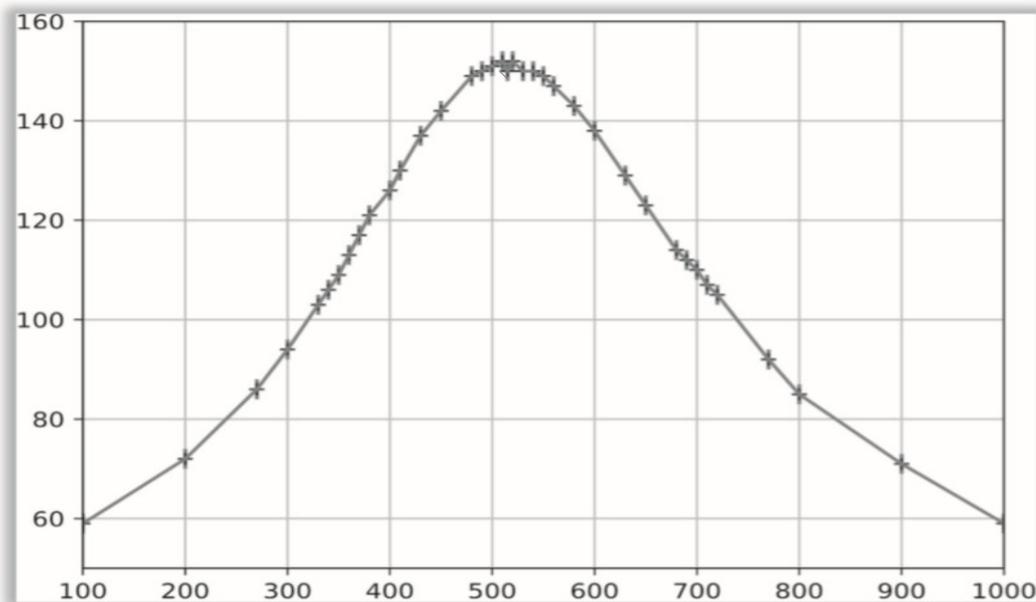


Figure 6

PROBLEME 3 : Accordeur de guitare

Un micro transforme un signal acoustique en signal électrique de même fréquence (tension). Après transformation en signal électrique, l'analyse du spectre de la décomposition en série de Fourier du signal acoustique émis est constitué de la fréquence du fondamental f_1 et de fréquences multiples $n f_1$ constituant les harmoniques (en pratique, des non linéarités entraînent l'apparition d'autres fréquences dans le spectre du signal).

La fréquence f_1 du mode fondamental détermine la note. La répartition et les amplitudes des harmoniques définissent le timbre du son.

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare.

La guitare comporte six cordes: Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu. Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée: on notera f_{oc} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur :

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur .
- Enregistrement du signal $u_c(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder: signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{oc} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal: obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{oc} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal: obtention d'un signal carré de fréquence f_{oc} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{oc} .
- Dans les accordeurs récents le traitement est numérique: les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{ac} = f_{oc}$.

Le Signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

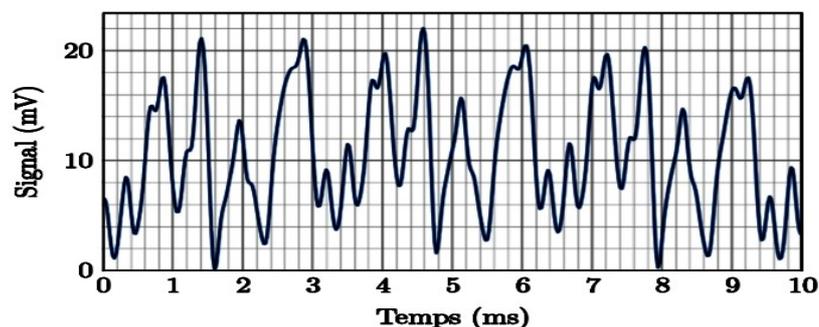


Figure 2 Signal de la guitare

1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
3. De quelle corde de guitare s'agit-il?
4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques? Justifier.

Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

5. En effectuant un schéma équivalent en BF (basse fréquence), puis un autre en HF (haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.

6. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.

7. Ecrire la fonction de transfert sous la forme : $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$. Exprimer la pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

8. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain en choisissant la variable $x = \frac{\omega}{\omega_1}$.

9. On a choisi $R_1=100k\Omega$ et $C_1=100nF$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à $-3dB$ de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

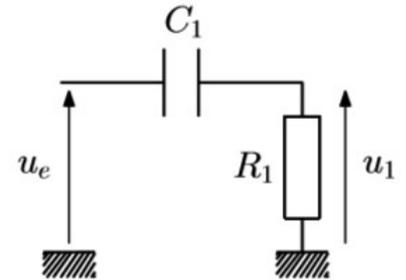


Figure 3 Filtre (F_a)

Second filtre : amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4 (filtre (F_b)).

Ce filtre comporte un amplificateur opérationnel dont le candidat n'a pas besoin de connaître le fonctionnement.

On admet que la fonction de transfert du filtre F_b est $\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$

où $G_0 = \frac{R_2}{R_3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$.

10. Etablir l'expression du gain $G_2(\omega) = |\underline{H}_2(j\omega)|$. Quelle est sa limite en basse fréquence ? en haute fréquence ?

11. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680k\Omega$, $R_3 = 6k\Omega$ et $C_2=470pF$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

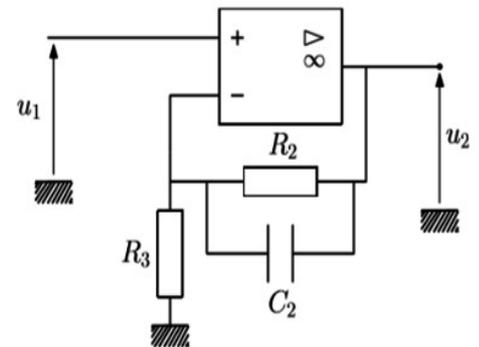


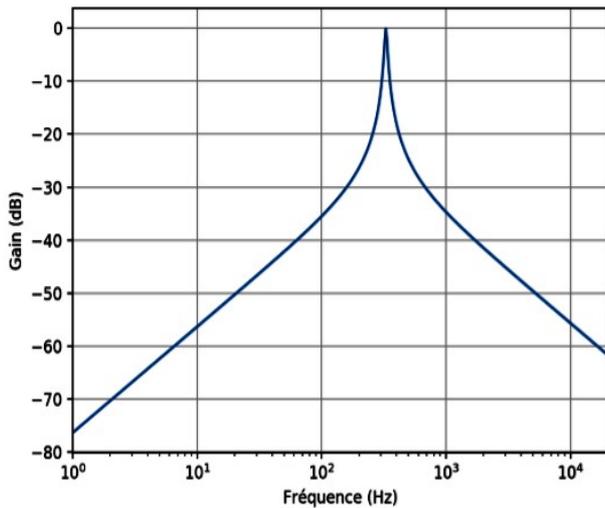
Figure 4 Filtre (F_b)

Troisième filtre: Filtrage (très) sélectif commandé

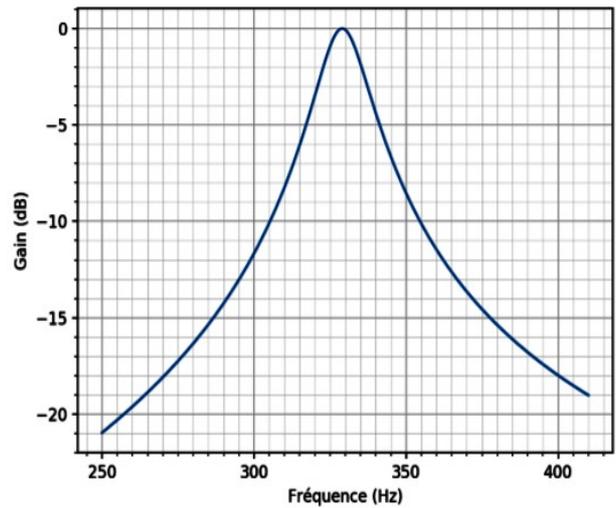
On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{oc} du signal u_2 , dont la valeur est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée).

On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} .

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.



(a)



(b)

Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

12. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

13. Donner une estimation de sa bande-passante à -3dB après l'avoir définie.

14. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre (on exprimera le rapport de l'amplitude de la tension de sortie sur la tension d'entrée).

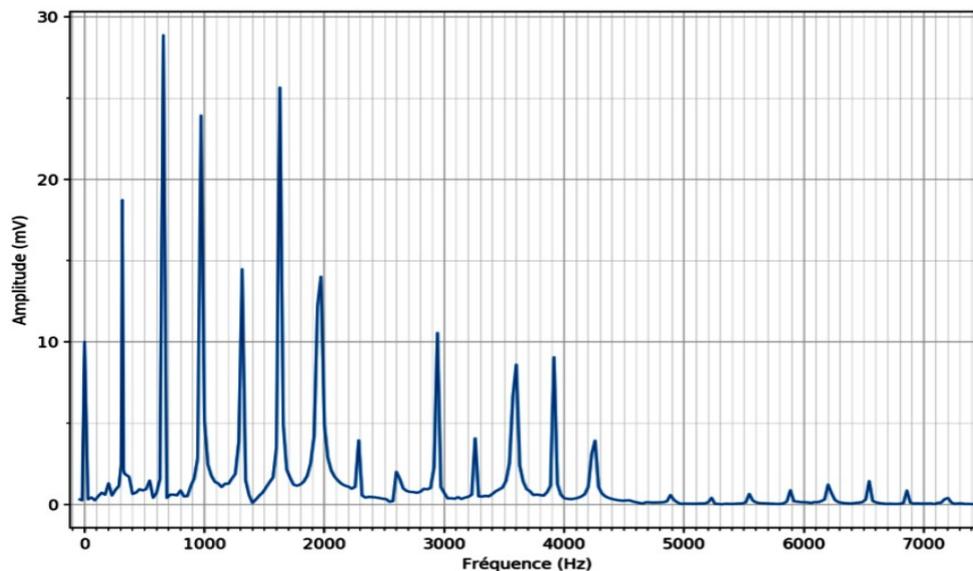


Figure 6 Spectre du signal d'entrée

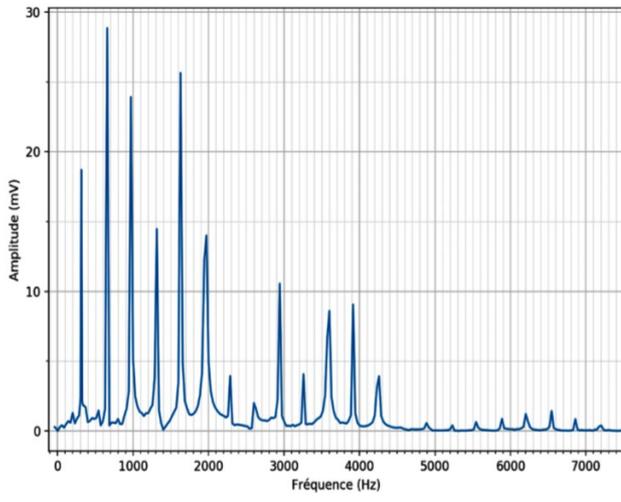
L'analyse spectrale La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

15. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

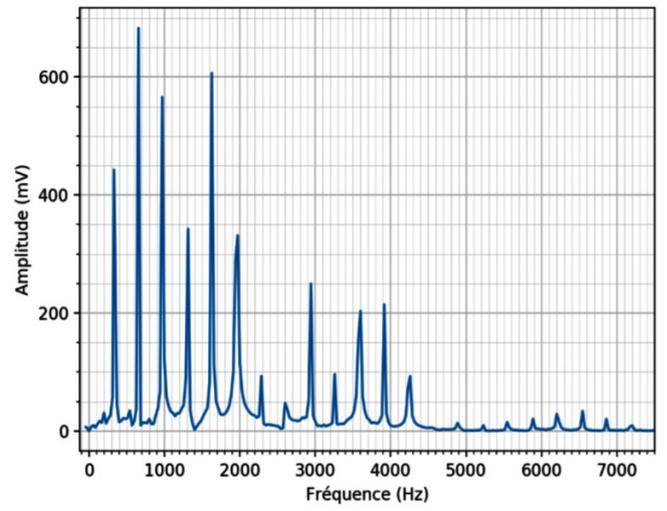
16. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

17. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

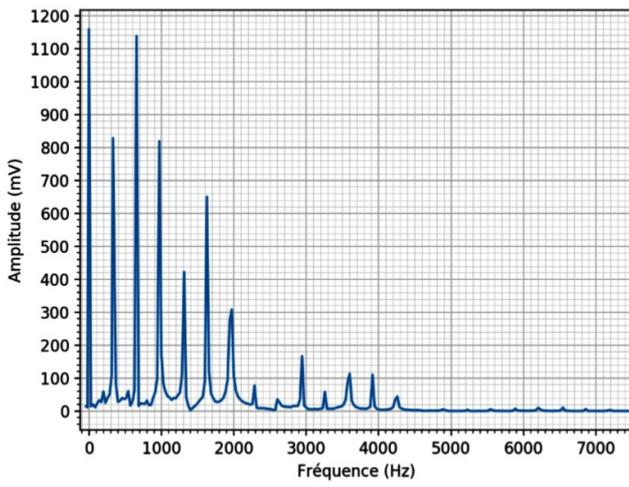
18. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.



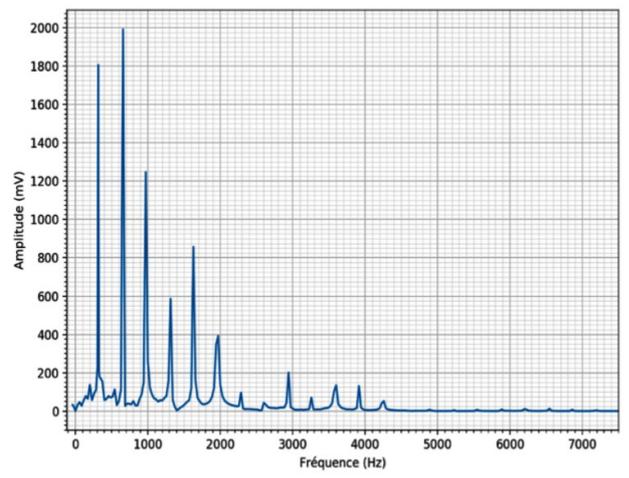
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres

Correction

Correction problème 1 :

Établissement du courant:

1. La résistance est court-circuitée donc $i_R(t) = 0$.

2. Pour $t = \infty$, la bobine est équivalente à un fil en série avec une résistance r donc $u_L(\infty) = r i(\infty) = E$ donc

$$i(\infty) = \frac{E}{r}$$

Pour $t = 0$, la bobine est équivalente à un fil car l'interrupteur est ouvert depuis longtemps. Grâce à la loi de Pouillet, on établit : $i(0^-) = \frac{E}{R+r}$. D'après la continuité de l'intensité dans la bobine.

$$i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R+r}$$

Application numérique :

$$i(\infty) = \frac{E}{r} = \frac{12}{100} = 0,12 \text{ A} = 120 \text{ mA} \quad i(0^+) = \frac{E}{r+R} = \frac{12}{10100} = 0,0012 \text{ A} = 1,2 \text{ mA} = \frac{i(\infty)}{100}$$

3. D'après la loi des mailles $E = u_L(t)$ or $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} + r i(t)$ d'où

l'équation différentielle : $\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L}$ avec $\tau = \frac{L}{r}$.

Application numérique : $\tau = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ s}$.

4. $i(t) = i_h + i_p(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{r}$. Or $i(0^+) = \frac{E}{R+r}$. On en déduit que :

$$\frac{E}{R+r} = A + \frac{E}{r} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{E}{R+r} - \frac{E}{r} = -\frac{ER}{r(R+r)} \quad \text{d'où} \quad i(t) = \frac{E}{r} \left(1 - \frac{R}{R+r} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Application numérique : L'expression numérique de $i(t)$ est :

$$i(t) = \frac{12}{100} \left(1 - \frac{10000}{10000+100} e^{-100t} \right) \approx 0,12 (1 - e^{-100t})$$

5. $W_L = \frac{1}{2} L i(\infty)^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{r} \right)^2$ Application numérique :

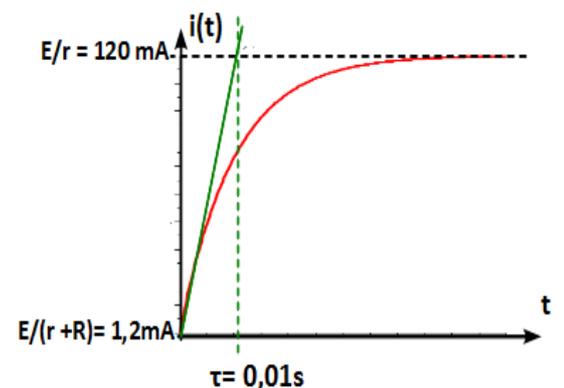
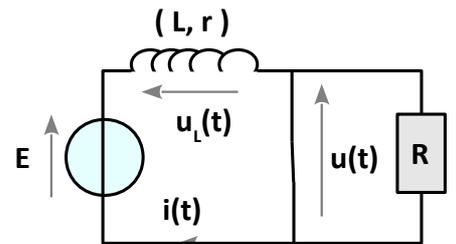
$$W_L = \frac{1}{2} \times 1 \times 0,12^2 = 7,2 \cdot 10^{-3} = 7,2 \text{ mJ}$$

Arrêt du courant:

6. $u(0^-) = 0$. $u(0^+) = R i(0^+) = R i(0^-) = \frac{11 \times 10000}{100} = 1200 \text{ V}$ (on utilise la continuité de l'intensité

dans la bobine.

Il y a un phénomène de surtension aux bornes de la résistance et de l'interrupteur à l'ouverture de l'interrupteur. Il apparaît une étincelle de rupture.



Correction problème 2 : (d'après concours commun INP 2019)

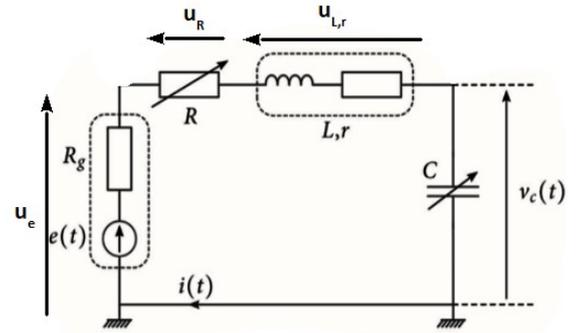
1. Pour $t > 0$, on applique la loi des mailles : $v_c + u_R + u_{L,r} = u_e$

or $i = C \frac{dv_c}{dt}$ d'où :

$$\bullet \quad u_R = Ri = RC \frac{dv_c}{dt}$$

$$\bullet \quad u_{L,r} = L \frac{di}{dt} + ri = LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + rC \frac{dv_c}{dt}$$

$$\bullet \quad u_e = e(t) - R_g i = e(t) - R_g C \frac{dv_c}{dt}$$



d'où l'équation différentielle : $LC \frac{d^2 v_c}{dt^2} + (R+r+R_g)C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e(t)$.

On écrit l'équation sous la forme: $\ddot{v}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{v}_c + \omega_0^2 v_c = e(t) \omega_0^2$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q = \frac{L \omega_0}{R'}$.

2. $e(t) = 0$, l'équation devient : $\ddot{v}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{v}_c + \omega_0^2 v_c = 0$, pour déterminer la solution, on lui associe à

l'équation différentielle homogène l'équation caractéristique: $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Son discriminant est :

$$\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = -4 \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right).$$

$\Delta < 0$ car $Q > 1/2$.

Les solutions sont : $r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\mu \pm i \Omega$.

On en déduit l'expression de la pseudo-pulsation : $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et de la pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}. \text{ Par identification : } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

3. On remplace Q et T_0 par leur expression : $T^2 = \frac{4\pi^2 LC}{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \frac{4\pi^2 LC}{1 - \frac{R'^2 C}{4L}} = \frac{aC}{1-bC}$. Par identification :

$$a = 4\pi^2 L \text{ et } b = \frac{R'^2}{4L}.$$

4. La modélisation affine semble cohérente avec les données expérimentales (d'après le coefficient de corrélation, même si celui-ci n'est pas toujours un bon indicateur). Cette modélisation suppose $bC \ll 1$ car la droite passe par l'origine. La pente est alors a . On en déduit alors

$$L = \frac{a}{4\pi^2} = \frac{3,3}{4\pi^2} = 84 \text{ mH} \text{ (la pente est donnée avec deux chiffres significatifs d'où L avec deux$$

chiffres significatifs). L'hypothèse sur b est valable si $bC \ll 1$ cad $\frac{R'^2 C}{4L} \ll 1$

5. Le régime critique est obtenu pour $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = -4 \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) = 0$ soit $Q = \frac{1}{2}$. D'où en remplaçant

l'expression de Q : $R'_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

6. Il n'est pas précisé si la réponse du circuit présentée en voie 2 est la tension aux bornes du condensateur ou autre. On remarque cependant que la courbe 1 est un régime apériodique (monotone), la courbe 3 un régime pseudopériodique (avec dépassement), donc la courbe 2 est probablement le régime (apériodique) critique car il est le plus rapide des trois.

7. $R_c = R'_c - r - R_g$ d'où $R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} - r - R_g$. L'ordonnée à l'origine de la courbe tracée est :

$p = -(r + R_g)$. on en déduit : $-81 = -(r + R_g)$ d'où $r = 81 - R_g = 81 - 50 = 31 \Omega$. D'après la notice l'incertitude sur R_g est de 3% soit $\Delta R_g = \frac{3 \times 50}{100} = 1,5 \Omega \approx 2 \Omega$ (doit être calculé avec un seul chiffre significatif).

On en déduit : $r = (31 \pm 2) \Omega$

8. L'allure de la courbe obtenue fait penser à la résonance en intensité dans un circuit RLC série en RSF. Si l'on suppose que l'abscisse correspond aux fréquences, la fréquence de résonance serait : $f_0 = 520 \text{ Hz}$

Or $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. On peut calculer la cohérence des valeurs de C possibles en prenant $L = 84 \text{ mH}$.

$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 520^2 \times 84 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^{-6} \mu F$. Le résultat est un peu en dehors de la gamme des valeurs possibles, ce qui peut être expliqué par la détermination de f_0 peu précise en raison de l'échelle du graphe.

On peut déterminer R grâce au facteur de qualité donné par la relation : $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ Δf étant la largeur de la bande passante. Cette détermination risque d'être encore moins précise que la précédente.

Graphiquement : L'ordonnée max divisée par $\sqrt{2}$ est de l'ordre de 110. On en déduit $\Delta f \approx 350 \text{ Hz}$

d'où $Q = \frac{520}{350} = 1,5$ or $Q = \frac{1}{R'} \sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où $R' = R + R_g + r = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où $R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r$

Application numérique : $R = \frac{1}{1,5} \sqrt{\frac{84 \cdot 10^{-3}}{1,1 \cdot 10^{-6}}} - 50 - 31 = 103 \Omega$. On est bien dans la gamme des valeurs de résistances annoncées.

Pour vérifier la cohérence avec la figure 5, on remarque que la valeur de C trouvée donne comme résistance critique : $R_c = 500 \Omega$.

Avec la formule, on trouve : $R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} - R_g - r = 2 \sqrt{\frac{84 \cdot 10^{-3}}{1,1 \cdot 10^{-6}}} - 50 - 31 = 471 \Omega$. En considérant deux chiffres significatifs, on retrouve la même valeur.

Correction problème 3 : (d'après centrale PSI 2019)

Le signal

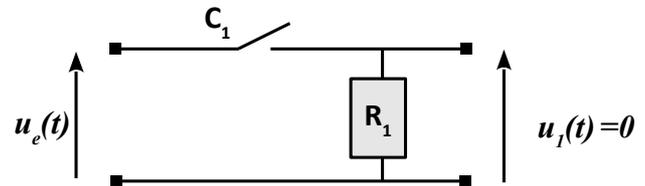
1. La valeur moyenne du signal est d'environ 10 mV.
2. On relève la période sur le graphe de la figure 2, et on trouve environ 3,2 ms.

La fréquence correspondante est **f ≈ 315 Hz**.

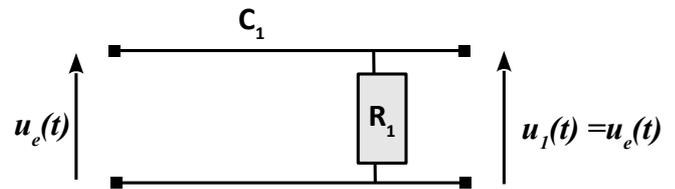
3. La fréquence donnée la plus proche de la fréquence mesurée correspond à la corde de Mi aigu (désaccordée).
4. Le signal n'étant pas sinusoïdal, plusieurs harmoniques seront présentes dans le spectre.

Premier filtre

5. En basse fréquence (ci-contre): le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert ainsi $u_1(t)=0$.



En haute fréquence (ci-contre): le condensateur est équivalent à un fil ainsi $u_1(t)=u_e(t)$.



Conclusion : Le filtre coupe les basses fréquences : **c'est un filtre passe-haut.**

6. Fonction de transfert :

$$H_1(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_c} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} \quad \text{où} \quad \boxed{H_1(j\omega) = \frac{jR_1 C_1 \omega}{1 + jR_1 C_1 \omega}}$$

7. $\boxed{H_1(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}}$, On reconnaît est un filtre passe-haut du 1er ordre . $\boxed{\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}}$ est la pulsation de coupure du filtre.

8. En posant $x = \frac{\omega}{\omega_1}$ la fonction de transfert devient : $\boxed{H_1(jx) = \frac{jx}{1 + jx}}$. Pour tracer le diagramme de Bode on étudie le comportement asymptotique.

Équations des asymptotes.

• Pour $x \rightarrow 0^+$: on considère que $1 + jx = 1$ d'où $\underline{H}_{10^+} = jx$.

On en déduit $|\underline{H}_{10^+}| = G_{10^+} = x$ d'où **GdB_{10^+} = 20 log G_{10^+} = 20 log x**

• Pour $x \rightarrow \infty$: on considère que $1 + jx = jx$ d'où $\underline{H}_{1\infty} = 1$.

On en déduit $|\underline{H}_{1\infty}| = G_{1\infty} = 1$ d'où

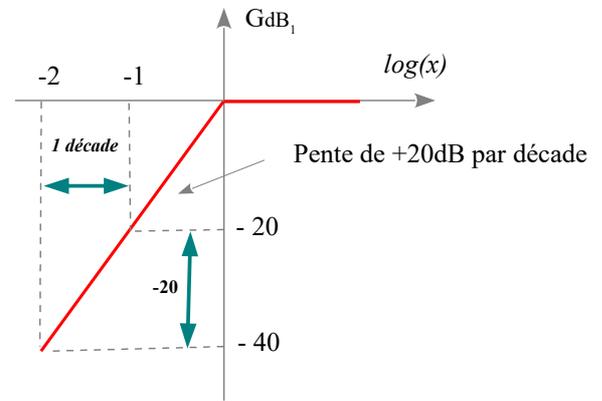
$$\mathbf{GdB_{1\infty} = 20 \log H_{1\infty} = 20 \log (1) = 0}$$

Tracé du diagramme :

• Intersection des asymptotes :

$GdB_{10+} = GdB_{1\infty} \Rightarrow 20 \log x = 0 \Rightarrow \log x = 0$ les asymptotes se croisent au point (0,0)

$$GdB_{10+} = -20 \text{ pour } \log x = -1$$



9. $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = \frac{1}{2\pi \times 100 \cdot 10^3 \times 100 \cdot 10^{-9}} = 15,9 \text{ Hz}$. Cette fréquence est très inférieure à la

fréquence du signal de la figure 2, le but du filtre est de couper toutes les composantes continues du signal d'entrée afin d'avoir en sortie un signal de valeur moyenne nulle.

Second filtre

10. $\underline{H}_2(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_2} + G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$. Ainsi $G_2(\omega) = |\underline{H}_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 + G_0)^2 + (\frac{\omega}{\omega_2})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_2})^2}}$.

Comportement en basse fréquence : $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_2(\omega) = 1 + G_0$

Comportement en haute fréquence : $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_2(\omega) = 1$.

11. $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2} = \frac{1}{2\pi \times 680 \cdot 10^3 \times 470 \cdot 10^{-12}} = 498 \text{ Hz}$ et $G_0 = \frac{R_2}{R_3} = \frac{680}{6} = 113$

Ce filtre sert à amplifier les signaux de basse fréquence (inférieurs à f_2). Dans le cas du signal de la figure 2. L'amplitude du fondamental sera amplifiée par contre les harmoniques ne seront pas modifiées.

3^{ème} filtre

12. Ce filtre correspond à un filtre passe-bande (car le gain diminue rapidement en haute et en basse fréquence). La fréquence centrale caractéristique est $f_0 \approx 330 \text{ Hz}$ par lecture sur la figure 5b.

Remarque : on peut supposer qu'il s'agit en réalité de 329,6 Hz correspondant à la fréquence du Mi aigu.

13. La bande passante est la bande de fréquences pour lesquelles $GdB(f) \geq GdB_{max} - 3$. Dans le cas présent, $GdB_{max} = 0$. On détermine les fréquences de coupure telles que : $GdB(f_c) = GdB_{max} - 3 = -3$. Par lecture de la figure

5b, on trouve $f_{c1} \approx 320 \text{ Hz}$ et $f_{c2} \approx 340 \text{ Hz}$. Ainsi la bande passante est la bande de fréquences telle que :

$$320 \text{ Hz} \leq f \leq 340 \text{ Hz}$$

14. $GdB(315 \text{ Hz}) = -6 = 20 \log \frac{U_s}{U_e}$ ainsi $\log \frac{U_s}{U_e} = \frac{-6}{20} = \frac{-3}{10}$ d'où $\frac{U_s}{U_e} = 10^{\frac{-3}{10}} = 0,50$. La composante spectrale en sortie est atténuée d'un facteur 2.

15. On trouve un premier pic (à $f = 0$) à 10 mV ce qui correspond bien à la valeur moyenne estimée en début de problème. On remarque que le fondamental est un peu au-dessus de 300 Hz, ce qui est bien compatible avec un signal à 315 Hz. Enfin, le 10e harmonique a une fréquence de 3200 Hz environ. Ceci correspond à un signal à 320 Hz ce qui, compte tenu des incertitudes lors du relevé initial, correspond à la valeur attendue.

16. En sortie du premier filtre, seule la composante continue sera supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du spectre (a).

17. À 315 Hz, le filtre (F_b) amplifie environ 100 fois le fondamental, un peu moins l'harmonique de rang 2 et quasiment pas les autres harmoniques. On peut donc s'attendre à un signal avec un fondamental d'amplitude environ égale à 1800 mV, ce qui correspond au spectre (d).

18. Le spectre du signal en sortie de (F_c) comprendra un fondamental à peu près divisé par 2 (gain à -6 dB) soit environ 900 mV, un harmonique de rang 2 très faible (un calcul montre qu'on obtient environ 63 mV) et des autres harmoniques quasi-absents. Le signal temporel sera quasi-sinusoïdal, d'amplitude 900 mV, et de fréquence 315 Hz.

