Préparation DS°5 sciences physiques

4h

PROBLEME 1 : Étude d'un mouvement cycloïdal

La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On peut par exemple la visualiser en prenant une photographie en pose longue (plusieurs secondes) et de nuit d'un cycliste qui aurait fixé une ampoule à la périphérie de l'une de ses roues : la source lumineuse laisse sur la pellicule une trace continue qui est une portion de cycloïde. On s'intéresse ici à l'aspect purement cinématique du mouvement du point qui engendre la cycloïde.

1. Équations paramétriques cartésiennes du mouvement.

On note M le point fixe du cercle C, de centre A et de rayon R.

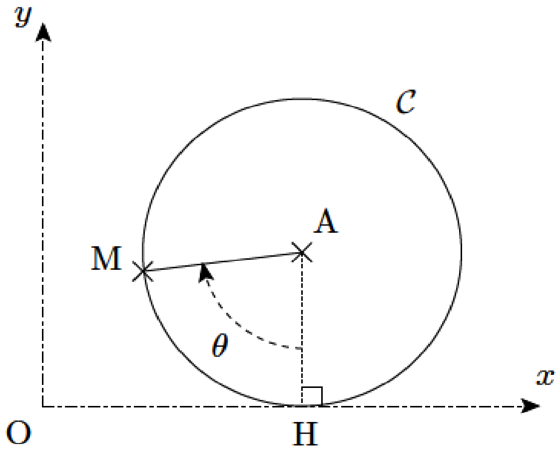
A l'instant t=0, on suppose que le point M est confondu avec l'origine O du repère (O, x , y).

La position du point M à l'instant t est paramétrée par l'angle θ(t) formé par le rayon AM avec la verticale descendante AH.

Le point H étant de projeté orthogonal de A sur l'axe (Ox).

Il s'agit dans ce paragraphe de déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y , z) du point M en tant que fonctions du paramètre θ.

Le mouvement du point M (représenté ci-dessous) est étudié dans le référentiel R de repère d'espace (O , x , y).



1.1. Justifier la relation : $R\times\theta(t)=\overline{OH}$

1.2. Exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA(t)}$ et $\overrightarrow{AM(t)}$ dans la bases cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de R et $\theta(t)$.

1.3. En décomposant le vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$ de manière judicieuse, montrer que les équations paramétriques du mouvement du point M sont : $x(t)=R(\theta - \sin\theta)$ et $y(t)=R(1 - \cos\theta)$

A fin de simplifier l'étude cinématique, on se limite dans toute la suite au cas où le centre A du cercle C à un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0=v_0\vec{u}_x$.

2. Vitesse instantanée

2.1. En utilisant la relation établie à la question 1.1, exprimer la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ en fonction de R et v_0 .

2.2. Exprimer les composantes dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ du vecteur vitesse instantané $\vec{v}$ du point M en fonction de v_0 et θ .

2.3. Montrer que la norme v de la vitesse s'écrit : $v=2\,v_0\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. *On rappelle que : $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.*

2.4. Pour quelle phase de la trajectoire le mouvement de M est-il accéléré ? Pour quelle phase est-il décéléré ? En quoi la vitesse du point M présente-t-elle un caractère surprenant par rapport à celle du point A.

3. Accélération instantanée

3.1. Exprimer les composantes dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ du vecteur accélération instantané $\vec{a}$ du point M en fonction de v_0 , R et θ .

3.2. Montrer que la norme a du vecteur accélération du point M est constante.

Application numérique : calculer a pour un pneu de voiture de rayon R=35cm et tel que v_0=130 km.h^{-1}.

3.3. Montrer que le vecteur $\vec{a}$ est constamment dirigé vers le centre A tout au long du mouvement.

4. Tracés (feuille à rendre avec la copie : annexe 1).

PROBLEME 2 : Chute et Plongeon dans une piscine

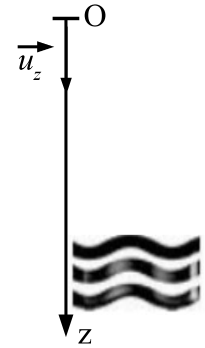
Dans tout le problème on prendra g= 10 m.s^{-2}.

On rappelle que la densité d d'un corps solide ou liquide :

Si ρ_{eau} est la masse volumique de l'eau et ρ_{corps} la masse volumique du corps considéré sa densité est: $d=\frac{\rho_{corps}}{\rho_{eau}}$.

Chute verticale

Un baigneur de masse m = 80 kg saute d'un plongeoir situé à une hauteur h = 10m au dessus de la surface de l'eau. On considère qu'il se laisse chuter verticalement sans vitesse initiale et qu'il est uniquement soumis à la force de pesanteur durant la chute. On note O*z* l'axe vertical descendant du repère d'espace $R(O,\vec{u_z})$, O étant le point de départ du saut . On repère la position du baigneur grâce à son abscisse *z*(t).



1. Déterminer l'équation horaire du mouvement *z(t)* avant que le baigneur ne pénètre dans l'eau. En déduire les expressions littérales de la vitesse d'entrée v_e telle que $\vec{v_e}=v_e\vec{u_z}$ du baigneur dans l'eau, et de la durée t_c de la chute. Faire les applications numériques.

2. Quand le baigneur est dans l'eau, il ne fait aucun mouvement et subit en plus de la pesanteur :

- Une force de frottement fluide $\vec{f_f}=-k\,\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant sa vitesse et k=250kg.s^{-1}) ;
- La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}=-\frac{m}{d_h}\vec{g}$ (d_h = 0,90 est la densité du corps humain)

2.1. Justifier l'expression de la poussée d'Archimède.

2.2. Établir l'équation différentielle vérifier par v_z la composante de la vitesse du baigneur sur l'axe *Oz* sous la forme : $\dot{v}_z+\frac{v_z}{\tau}=\beta g$. Identifier τ et β en fonction des données du texte. Quelles sont leurs unités respectives ?

2.3. Résoudre l'équation en prenant comme nouvelle origine des temps t = t_c et en utilisant les constantes τ et β.

2.4. Le baigneur atteint une vitesse limite v_L , déterminer son expression littérale en fonction de g, τ et β puis en fonction de m, g, k et d_h. Faire l'application numérique et commenter le signe de v_L.

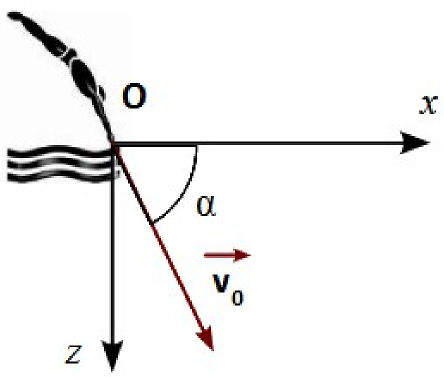
2.5. Exprimer la vitesse v_z en fonction de v_e, v_L τ et t. Déterminer littéralement puis numériquement à quelle date t_1 le baigneur commence à remonter.

2.6. En prenant comme nouvelle origine de l'axe O*z* la surface de l'eau, exprimer *z*(t) en fonction de τ, v_e et v_L. En déduire la profondeur maximale z_{max} pouvant être atteinte.

2.7. En fait, il suffit que le baigneur arrive au fond de la piscine avec une vitesse de l'ordre de v_2=1ms^{-1} pour qu'il puisse se repousser avec ses pieds sans risque. A quelle date t_2 atteint-il cette vitesse, en déduire la profondeur minimale z_{min} du bassin.

Plongeon

Le même baigneur décide maintenant d'effectuer un plongeon (figure ci-contre).



On suppose qu'il entre dans l'eau avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α=60° par rapport à l'horizontale et de module v_0= 8m.s^{-1}.

Les forces qui s'exercent sur lui sont les mêmes que précédemment mais le coefficient k est divisé par 2 en raison d'une meilleure pénétration dans l'eau.

On repère le mouvement du plongeur grâce aux axes O*x* (axe horizontal de même sens que $\vec{v_0}$) et O*z* (vertical descendant comme précédemment), le point O est le point de pénétration dans l'eau.

3. Déterminer les équations différentielles du mouvement vérifiées par *x*(t) et *z*(t).

4. En déduire les composantes v_x et v_z de la vitesse dans l'eau en fonction du temps. Existe-t-il une vitesse limite v'_L? Si oui la calculer.

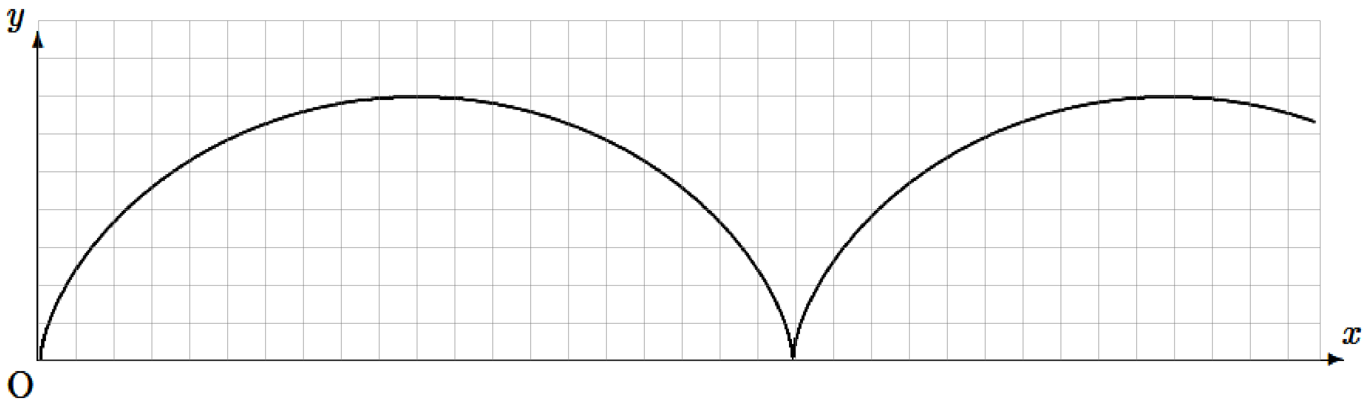
5. Le plongeur peut-il atteindre le fond de la piscine situé à h=4m ?

Annexe 1 à rendre avec la copie

Nom Prénom____________________

4. Tracés

Voici la courbe engendrée par le point M(x,y) lorsque l'on fait varier le paramètre θ :



4.1. Compléter le tableau ci-dessous correspondant à différentes valeurs de θ:

Valeurs de θ	$\theta_1=\frac{\pi}{2}$ (quart de tour)		$\theta_2=\pi$ (demi-tour)		$\theta_3=2\pi$ (tour complet)	
Coordonnées du point M *(en fonction de R et π si besoin)*	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
Coordonnées du point A *(en fonction de R et π si besoin)*	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
Coordonnées de $\vec{v}$ *(en fonction de v_0)*	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
Coordonnées de $\vec{a}$ *(en fonction de R et v_0)*	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***

4.2. En quoi les vecteurs vitesse et accélération pour θ =2π présentent-ils un caractère surprenant ? Expliquer ce paradoxe .

____

____

____

4.3. Compléter le dessin de la trajectoire :

- En graduant les échelles verticales et horizontales en fonction de R.
- En positionnant les points M_i et A_i correspondants à : $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=\pi$ et $\theta_3=2\pi$.
- En traçant les vecteurs (pas à l'échelle) $\vec{v}_i$ et $\vec{a}_i$ correspondants à : $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=\pi$ et $\theta_3=2\pi$.

Correction

Correction problème 1 :

Etude d'un mouvement cycloïdal

1) Equations paramétriques cartésiennes du mouvement

11 La roue roule sans glisser => $\overline{HM} = \overline{OH}$ car à $t=0$ M est confondu avec O => $\boxed{R\theta(t) = \overline{OH}}$

12 $\vec{AM} = -R\sin\theta\,\vec{u_x} - R\cos\theta\,\vec{u_y}$ $\quad \vec{OA} = R\theta\,\vec{u_x} + R\vec{u_y}$

13 $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HA} + \vec{AM} = R\theta\vec{u_x} + R\vec{u_y} - R\sin\theta\,\vec{u_x} - R\cos\theta\,\vec{u_y}$ donc

$$\boxed{\vec{OM} = R(\theta - \sin\theta)\vec{u_x} + R(1-\cos\theta)\vec{u_y}}$$

2) Vitesse instantanée

21 D'après 11 $R\theta = \overline{OH} = v_0 t$ car OH est la distance parcourue par le point A =>

$R\dfrac{d\theta}{dt} = v_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}$

22 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = R(\dot\theta - \dot\theta\cos\theta)\vec{u_x} + R\dot\theta\sin\theta\,\vec{u_y} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0(1-\cos\theta)\vec{u_x} + v_0\sin\theta\,\vec{u_y}}$

23 $\|\vec{v}\| = R\dot\theta\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin\theta^2} = R\dot\theta\sqrt{2-2\cos\theta} = v_0\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \boxed{v = 2v_0\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$

24 $\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \nearrow$ pour $\frac{\theta}{2}$ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ cad pour θ variant de 0 à π.

$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \searrow$ pour $\frac{\theta}{2}$ variant de $\frac{\pi}{2}$ à π cad pour θ variant de π à 2π.

Conc : le mouvement est accéléré pour θ variant de 0 à π et décéléré pour θ variant de π à 2π

La vitesse du point M varie alors que la vitesse du point A est constante !

3 Accélération

31 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = R\dot\theta^2\sin\theta\,\vec{u_x} + R\dot\theta^2\cos\theta\,\vec{u_y} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \dfrac{v_0^2}{R}\left(\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}\right)}$

32 $\|\vec{a}\| = a = \dfrac{v_0^2}{R}\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \Rightarrow a = \dfrac{v_0^2}{R}$ AN $a = \left(\dfrac{130}{3{,}6}\right)^2 \times \dfrac{1}{35.10^{-2}} = 3726\ m\,s^{-2}$

33 $\vec{a} = -\dfrac{v_0^2}{R^2} \times -R\left(\sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}\right) = -\dfrac{v_0^2}{R^2}\vec{AM} \Rightarrow \vec{a} = -\dfrac{v_0^2}{R^2}\vec{AM}$

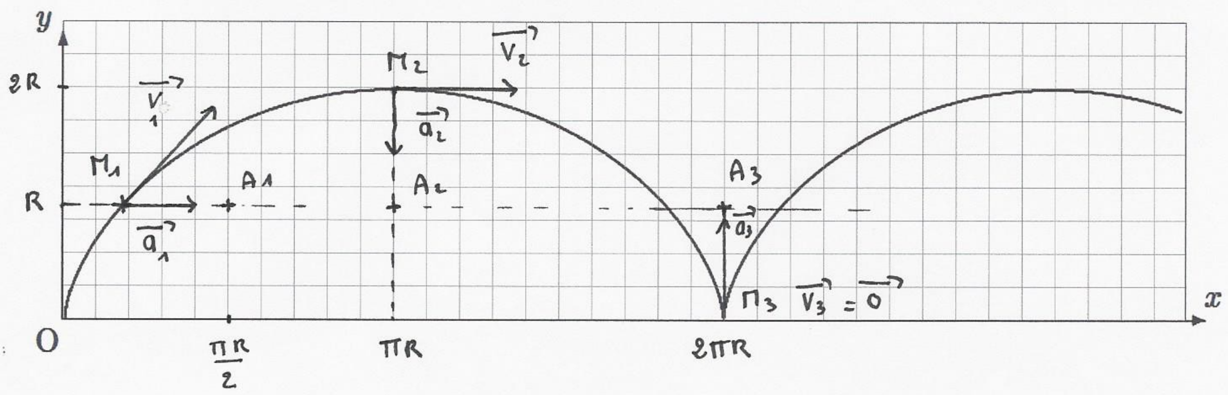
$\vec{a}$ est de sens opposé à $\vec{AM}$ => $\vec{a}$ est dirigée vers le centre A tout au long du mouvement.

Feuille à rendre avec la copie

Nom Prénom____________________

4. Tracés

Voici la courbe engendrée par le point M(x,y) lorsque l'on fait varier le paramètre θ :



4.1. Compléter le tableau ci-dessous correspondant à différentes valeurs de θ:

Valeurs de θ	$\theta_1=\frac{\pi}{2}$ (quart de tour)		$\theta_2=\pi$ (demi-tour)		$\theta_3=2\pi$ (tour complet)	
Coordonnées du point M	x	y	x	y	x	y
	$R(\frac{\pi}{2}-1)$	R	πR	$2R$	$2\pi R$	0
Coordonnées du A	x	y	x	y	x	y
	$\pi R/2$	R	πR	R	$2\pi R$	R
Coordonnées de $\vec{v}$	x	y	x	y	x	y
	v_0	v_0	$2v_0$	0	0	0
Coordonnées de $\vec{a}$	x	y	x	y	x	y
	$\frac{v_0^2}{R}$	0	0	$-\frac{v_0^2}{R}$	0	$\frac{v_0^2}{R}$

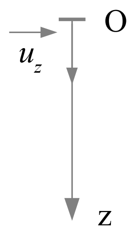
4.2. En quoi les vecteurs vitesse et accélération pour θ =2π présentent-ils un caractère surprenant ? Expliquer ce paradoxe .

Pour $\theta = 2\pi$ $\vec{v} = \vec{0}$ alors que $\vec{a} = v_0^2/R \, \vec{u_y} \neq \vec{0}$. Bien que nul, le vecteur vitesse varie. $\vec{a}$ exprime la variation de $\vec{v}$ par unité de temps c'est pour cette raison que $\vec{a}$ n'est pas nulle.

4.3. Compléter le dessin de la trajectoire :

- En graduant les échelles verticales et horizontales en fonction de R.
- En positionnant les points Mi et Ai correspondants à : $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=\pi$ et $\theta_3=2\pi$.
- En traçant les vecteurs $\vec{v}_i$ et $\vec{a}_i$ correspondants à : $\theta_1=\frac{\pi}{2}$, $\theta_2=\pi$ et $\theta_3=2\pi$.

Correction problème 2: Chute et Plongeon dans une piscine



Chute verticale

1. *Ref :* terrestre ; *Repère d'espace :* $R(O,\vec{u}_z)$ tel que à t = 0 le plongeur soit en O.

Base de projection : $(\vec{u}_z)$ *Coordonnées* : cartésiennes

Vecteurs cinématiques : $\vec{OM}=z\vec{u}_z$, $\vec{v}=\dot{z}\vec{u}_z$, $\vec{a}=\ddot{z}\vec{u}_z$

Bilan des forces : *Poids :* $\vec{P}=mg\vec{u}_z$

2ème loi de Newton : $m\vec{a}=\vec{P}$ d'où $\ddot{z}=g$ d'où par intégration en tenant compte des conditions initiales : $\boxed{z=\frac{1}{2}gt^2}$.

$\boxed{t_c=t(h)=\sqrt{\frac{2h}{g}}}$, $\boxed{v_e=\dot{z}(t_c)=g\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{2gh}}$

<u>**Application numérique:**</u> $\boxed{t_c=\sqrt{\frac{2\times 10}{10}}=1{,}41\,s}$, $\boxed{v_e=\sqrt{2\times 10\times 10}=14{,}1\,m.s^{-1}}$

2.1. Par définition, la poussée d'Archimède est égale à l'oposée du poids de volume de fluide déplacé donc $\vec{\Pi}=-\rho_{eau}V\vec{g}$ (1) avec V le volume du baigneur et ρ_{eau} la masse volumique de l'eau . Si ρ_h est la masse volumique du baigneur, $V=\frac{m}{\rho_h}$ de plus d'après la définition de la densité $d_h=\frac{\rho_h}{\rho_{eau}}$ donc $\rho_h=d_h\rho_{eau}$ d'où $V=\frac{m}{d_h\rho_{eau}}$ en remplaçant cette expression dans (1) on obtient $\vec{\Pi}=-\frac{m}{d_h}\vec{g}$.

2.2. Les hypothèses de travail sont les mêmes que pour la question 1.

Le nouveau bilan des forces est : $\vec{P}=mg\vec{u}_z$, $\vec{f}_f=-k\vec{v}=-kv_z\vec{u}_z$, $\vec{\Pi}=-\frac{m}{d_h}\vec{g}=-\frac{m}{d_h}g\vec{u}_z$

D'après la 2ème loi de Newton: $m\vec{a}=m\dot{v}_z\vec{u}_z=\vec{P}+\vec{f}_f+\vec{\Pi}$

Par projection sur l'axe Oz, on obtient: $m\dot{v}_z=mg-kv_z-\frac{m}{d_h}g$ on obtient: $\boxed{\dot{v}_z+\frac{v_z}{\tau}=g\beta}$

en posant $\boxed{\tau=\frac{m}{k}}$ et $\boxed{\beta=(1-\frac{1}{d_h})}$. **τ est homogène à un temps**, son unité SI est la seconde. **β n'a pas d'unité**.

2.3. L'équation différentielle à résoudre est du 1er ordre avec 2nd membre. $v_z(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+\tau g\beta$.

A t=0, $v_z(t)=A+\tau g\beta=v_e$ on en déduit $A=v_e-\tau g\beta$ d'où $\boxed{v_z(t)=\tau g\beta(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+v_e e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

2.4. $v_L=v(\infty)=\tau\beta g$ donc $\boxed{v_L=\frac{mg}{k}(1-\frac{1}{d_h})}$.

<u>**Application numérique:**</u> $\boxed{v_L=\frac{80\times 10}{250}(1-\frac{1}{0{,}9})=-0{,}356\,m.s^{-1}<0}$. **Le baigneur atteint sa vitesse limite quand il remonte.**

2.5. $\boxed{v_z(t)=(v_e-v_L)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_L}$. La date t_1 vérifie l'équation $v_z(t_1)=0$. On en déduit: $\boxed{t_1=\tau\ln(1-\frac{v_e}{v_L})}$.

<u>**Application numérique:**</u> $\boxed{t_1=\frac{80}{250}\ln(1-\frac{14}{0{,}356})=1{,}19\,s}$

2.6. $\frac{dz}{dt}=(v_e-v_L)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_L$ en prenant la primitive de chaque côté on obtient: $z(t)=-\tau(v_e-v_L)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_Lt+K$

K étant une constante déterminée grâce aux conditions initiales. $z(0)=-\tau(v_e-v_L)+K=0$. On en déduit $K=\tau(v_e-v_L)$ d'où d'où $\boxed{z(t)=\tau(v_e-v_L)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+v_Lt}$.

Application numérique: $z_{max}=z(t_1)=0{,}32(14+0{,}356)(1-e^{-\frac{1{,}19}{0{,}32}})+0{,}356\times1{,}19$ d'où $\boxed{z_{max}=4{,}1\,m}$.

2.7. $v_z(t_2)=(v_e-v_L)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_L=v_2$ on en déduit $\boxed{t_2=\tau\ln\left(\frac{v_e-v_L}{v_2-v_L}\right)}$.

Application numérique: $\boxed{t_2=0{,}757\,s}$ et $\boxed{z_{min}=3{,}9\,m}$

Plongeon

3. Le repère d'espace est $R(O,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$

Vecteurs cinématiques : $\vec{OM}=x\vec{u}_x+z\vec{u}_z$, $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x+\dot{z}\vec{u}_z$, $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x+\ddot{z}\vec{u}_z$

Bilan des forces:: $\vec{P}=mg\vec{u}_z$, $\vec{f}_f=-k'\vec{v}=-k'\dot{x}\vec{u}_x-k'\dot{z}\vec{u}_z$, $\vec{\Pi}=-\frac{m}{d_h}\vec{g}=-\frac{m}{d_h}g\vec{u}_z$ $k'=\frac{k}{2}$

D'après la 2[ème] loi de Newton: $m\vec{a}=m\dot{v}_z\vec{u}_z=\vec{P}+\vec{f}_f+\vec{\Pi}$

Par projection sur l'axe Ox, on obtient: $m\ddot{x}=-k\dot{x}$ (1)

Par projection sur l'axe Oz, on obtient: $m\ddot{z}=mg-k'\dot{z}-\frac{m}{d_h}g$ (2)

4. Les composantes de la vitesse initiale sont $\vec{v}_0=v_0\cos\alpha\,\vec{u}_x+v_0\sin\alpha\,\vec{u}_z$.

La résolution de l'équation (1) conduit à $\boxed{v_x(t)=v_0\cos\alpha\,e^{-\frac{t}{\tau'}}}$ avec $\tau'=2\tau$. La solution de l'équation (2) est la même qu'au 1 en remplaçant v_e par $v_0\sin\alpha$.

Ainsi $\boxed{v_z(t)=\tau' g\beta(1-e^{-\frac{t}{\tau'}})+v_0\sin\alpha\,e^{-\frac{t}{\tau'}}}$.

$v_x(\infty)=0$, $v_z(\infty)=v'_L=\tau' g\beta$ Le mouvement devient vertical et donc $\boxed{v'_L=2v_L=-0{,}712\,m.s^{-1}}$

5. On reprend les formules précédentes en remlaçant v_e par $v_0\sin\alpha$ et v_L par v'_L.

$\boxed{t'_1=\tau'\ln\left(1-\frac{v_0\sin\alpha}{v'_L}\right)}$. **Application numérique**: $\boxed{t'_1=1{,}52\,s}$

$\boxed{z(t'_1)=\tau'(v_0\sin\alpha-v'_L)(1-e^{-\frac{t}{\tau'}})+v'_L t}$.

Application numérique: $\boxed{z(t'_1)=3{,}35\,m}$. **Le plongeur n'atteint pas le fond.**