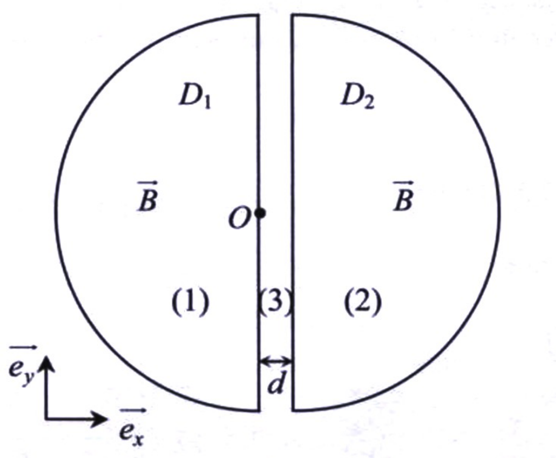
Préparation devoir surveillé n°7 sciences physiques

PROBLEME 1 : Étude d'un cyclotron

Le cyclotron est un type d'accélérateur de particules inventé par Ernest Orlando Lawrence et Milton Stanley Livingston de l'Université de Californie à Berkeley au début des années 1930.



Un cyclotron (cf schéma ci-contre) est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 (région 1) et D_2 (région 2) appelées *Dees* en anglais, dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ orthogonal au plan de la figure.

Entre ces deux *Dees,* une bande étroite de largeur d (région 3) est plongée dans un champ électrique alternatif $\vec{E}=\pm E\,\vec{e_x}$ de module constant E.

On introduit au point O(0,0,0) une particule de charge q > 0, sans vitesse initiale. La tension $U=V_{D_1}-V_{D_2}>0$ est alors positive.

Q1 – Quelle est le sens du champ électrique $\vec{E}$. Établir l'équation horaire du mouvement de la particule dans la région (3) avant qu'elle ne pénètre dans la région (2) où règne le champ magnétique ? Quelle est la nature du mouvement ?

En déduire la vitesse $\vec{v_1}$ de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2) en fonction de q, E, m et d et des vecteurs de base nécessaires.

Q2 - En admettant que la trajectoire est circulaire et que les particules tournent dans la sens horaire, déterminer le sens du champ magnétique dans la région (2). Montrer que c'est une trajectoire circulaire uniforme et déterminer sa vitesse angulaire. On posera $\omega_c=\dfrac{qB}{m}$. Déterminer l'expression du rayon de la trajectoire noté R en fonction de v_1 module de $\vec{v_1}$ et ω_c. Quelle est alors la vitesse $\vec{v}\,'_1$ de la particule lorsqu'elle sort de la région (2) ? L'exprimer en fonction de v_1 et des vecteurs de la base cartésienne nécessaires.

Q3 - Pendant que la particule était dans la région (2), le signe de la tension U a changé. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3), avant qu'elle ne pénètre dans la région (1) ? Exprimer la vitesse $\vec{v_2}$ de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (1), en fonction de q , E, d et m et des vecteurs de la base cartésienne nécessaires. Une justification brève mais bien construite suffira.

Q4 - La particule est à nouveau déviée dans la région (1).

4.a - Quelle est la nature de sa trajectoire ? Préciser le sens du champ magnétique $\vec{B}$.

Exprimer la durée τ de cette trajectoire. Montrer que cette durée a la même valeur à chaque passage dans la zone (1) et la zone (2) et permet de calculer le rapport $\dfrac{q}{m}$.

4.b - En déduire la fréquence de la tension alternative U nécessaire pour accélérer la particule à chacun de ses passages entre les *Dees*, en négligeant le temps de passage dans la région (3), en fonction de q, B et m .

Q5 - Après n passages dans la région (3), exprimer la vitesse v_n de la particule en fonction de E, q, d, m et n . Quel est l'intérêt du passage de la particule dans la région (3) ?

Q6 - Ce cyclotron a un diamètre maximal utile R_{max}= 52 cm.

6.a – Exprimer l'énergie cinétique maximale E_{cmax} des protons (de masse m) accélérés par ce cyclotron lorsque la fréquence de l'oscillateur électrique qui accélère les protons entre chaque *Dees* est f_c . On attend une expression de E_{cmax} en fonction de f_c, R_{max} et m.

Exprimer également le champ magnétique de module B nécessaire en fonction de f_c, m et q.

Pour information, avec une fréquence f_c = 12 MHz, on obtient une énergie cinétique maximale du proton de 2 Mev et un champ magnétique de 0,79 T.

6.b - L'amplitude de la tension alternative appliquée entre les deux *Dees* est U = 200 kV. Exprimer le nombre N de tours effectués par les protons pour atteindre leur énergie cinétique maximale en fonction de , E_{cmax} , q et U. *En faisant l'application numérique, on trouve qu'il faut que le proton fasse 5 tours.*

PROBLEME 2 : Marcher à son rythme pour aller loin

Le pas pendulaire effectué à la période propre de la jambe est le plus économe en énergie. La gravité devient l'alliée naturelle de nos muscles pour permettre le déplacement.

On se propose ici de déterminer la période propre d'oscillation d'une jambe adulte en utilisant un modèle simple.

Le référentiel d'étude est toujours le référentiel terrestre supposé galiléen, muni d'un repère cartésien $R(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

On assimile la jambe à un solide rigide de masse m_0 et de longueur d en rotation autour d'un axe horizontal $(O,\vec{e}_x)$ fixe dans le référentiel d'étude. $(O,\vec{e}_x)$ passe par la hanche du randonneur (il est sortant sur la figure 2)

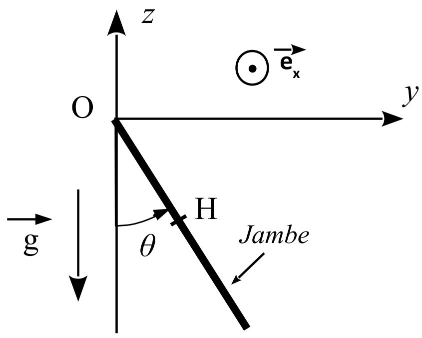


Figure 2 - Jambe et repère cartésien

La liaison pivot en O est supposée parfaite. Le moment d'inertie de la jambe par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_x)$ est noté J. On néglige tout frottement. On note H le centre d'inertie de la jambe situé à une distance d' de O. La jambe ne touche pas le sol dans cette étude. θ est l'angle entre la verticale descendante passant pas O et la droite *(OH)*.

1. Donner sans démonstration l'expression du moment cinétique scalaire, *Lox* de la jambe par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_x)$ en fonction de θ et J.

2. Que vaut le moment $M_{ox}(liaison)$ par rapport à $(O,\vec{e}_x)$ de l'action mécanique de la liaison en O ? justifier.

3. Déterminer l'expression du moment $M_{ox}(\vec{P})$ du poids de la jambe par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_x)$ en fonction de g, m_0, d' et θ.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ caractérisant le mouvement de la jambe.

On souhaite retrouver cette équation à l'aide d'une méthode énergétique.

5. Donner sans démonstration l'expression de l'énergie cinétique de la jambe.

6. Donner sans démonstration l'énergie potentielle de pesanteur de la jambe en fonction de m_0, g , d' et θ.

7. Justifier que l'énergie mécanique de la jambe se conserve au cours du temps.

8. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ caractérisant le mouvement de la jambe.

9. En se plaçant dans l'approximation des petites oscillations, montrer que la période propre T d'oscillation de la jambe est : $T=\dfrac{2\pi\sqrt{J}}{\sqrt{m_0 g d'}}$.

10. Le moment d'inertie de la jambe est $J=k\, m_0\, d^2$ où k est une constante positive, la même pour tous les individus. Le centre d'inertie H de la jambe est situé à mi-hauteur de la jambe. En déduire que la période propre T_0 de la jambe est indépendante de la masse et qu'elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de la jambe.

11. Un randonneur adulte a une jambe d'environ 90cm. La période propre d'oscillation de sa jambe est de 1,6s. Quelle est la période propre d'oscillation de la jambe d'un randonneur enfant dont la jambe mesure 40cm.

12. A l'aide d'une description simple du pas effectué, montrer que la vitesse du randonneur, lorsqu'il respecte sa période d'oscillations naturelle, est proportionnelle à la racine carrée de la longueur de sa jambe. Montrer alors que la vitesse « naturelle » de l'enfant est environ 1,5 fois moins grande que celle de l'adulte.

PROBLEME 3 : Étude d'un satellite de télédétection terrestre

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

Le satellite est assimilé à un point matériel M, la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6{,}4.10^3$ km.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $R_g(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindropolaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4{,}0.10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure 2.

Figure 1 - Principe d'un satellite de télédétection (source : opticsvalley)

Préliminaires

1) La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées ($r(t)$, $\theta(t)$, $z = 0$). Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}_M$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

2) On note $g_0 = 10 \text{m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle s'exprime sous la forme : $E_p(r) = -g_0 m \left(\frac{R_T^2}{r}\right)$. En déduire l'expression de la force $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0, m, R_T et r. L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ? Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à $\vec{F}$.

3) Soit $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de r, $\dot{\theta}$ et m. Montrer que le vecteur $\vec{L}_0$ est constant au cours du mouvement.

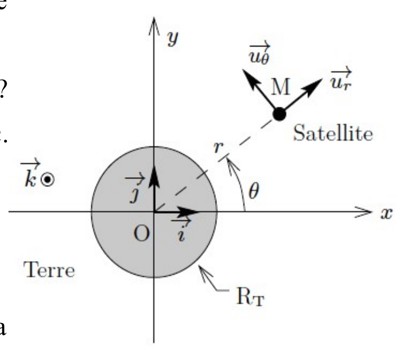


Figure 2

Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- **Phase balistique :** le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- **Phase de satellisation :** la satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

4) Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse $\vec{v}_M$ et le vecteur accélération $\vec{a}_M$ du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r\dot{\theta}$ de sa dérivée temporelle $\dot{v}$ et de r.

5) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r.

6) En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r. Justifier le signe de E_m.

7) Application numérique : calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8{,}0.10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40.10^3$ km.

Étude énergétique du satellite

8) On suppose ici que la trajectoire du satellite n'est pas nécessairement circulaire. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et qu'elle se met sous la forme : $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{m r^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}}$.

9) On appelle énergie potentielle effective : $\boldsymbol{E_{p,eff}(r) = E_m - \frac{1}{2} m \dot{r}^2}$. Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont données par l'inégalité $\boldsymbol{E_{p,eff}(r) \leq E_m}$. Expliquer ce résultat.

10) Le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

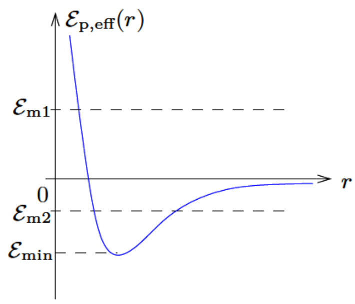


Figure 3 - Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

a) À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? une trajectoire hyperbolique? Justifier.

b) Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.

Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse (r_b = 8,0.10^3 km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute (r_h = 40.10^3 km) comme illustré sur la figure 4.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périgée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite en A et en P à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

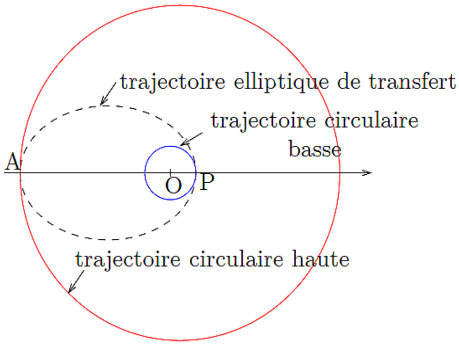


Figure 4

11) Que peut-on dire des valeurs de $\dot{r}$ lorsque le satellite est en A $(r = r_h)$ ou en P $(r = r_b)$? Comment s'exprime le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ?

12) Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique E_{mt} sur l'orbite elliptique que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme $r^2+\alpha r+\beta=0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0, E_{mt} , g_0 et R_T.

13) En déterminant la somme des racines de l'équation, en déduire que $E_{mt}=-\dfrac{g_0 m R_T^2}{2a}$.

14) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique E_{mt} du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier.

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase **le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié.** Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

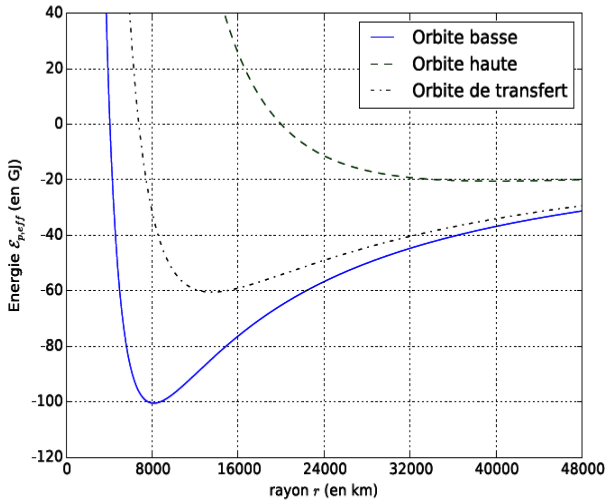


Figure 5 - $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ pour les 3 orbites

15) Relever sur la figure 5 la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon r_b *= 8,0.10^3 km.*

De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon r_h *= 40.10^3 km.*

16) En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1}, déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

17) Connaissez vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle - t -on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

Chute du satellite

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement $\vec{f}=-k\vec{v}$. Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique $E_m(t)=-\dfrac{g_0 m R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t)=\dfrac{g_0 R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

18) À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r. Quelle est le nom de la relation obtenue?

19) À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon r(t) est solution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{\dfrac{dr}{dt}+\dfrac{r(t)}{\tau}=0}$,

où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m. Montrer que τ est bien homogène à un temps.

20) En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant t = 0 sur une orbite circulaire de rayon r_0.

21) Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0.