

# Préparation concours blanc

## PROBLÈME 1: Étude d'un photocopieur (barème sur 30 points)

### Formules de conjugaison de Descartes

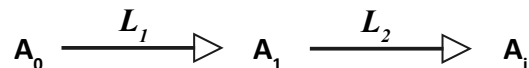
Soit un objet AB orthogonal à l'axe optique et tel que A est un point de l'axe optique . Si A'B' est son image par la lentille supposée mince de centre O :

- Les distances **algébriques**  $\overline{OA}$  et  $\overline{OA'}$  sont données par la relation :  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$
- Les dimensions **algébriques**  $\overline{AB}$  et  $\overline{A'B'}$  sont données par le grandissement transversal:  $G_T = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Un photocopieur est un dispositif qui, grâce à un système optique , permet de reproduire un document de dimension  $21\text{ cm} \times 29,7\text{ cm}$  (format dit A4) en un document soit de même dimension, soit de surface double (format dit A3) soit de surface moitié (format dit A5).

Le système optique forme l'image réelle du document sur un écran E sensible à la lumière (écran photosensible). On modélise le système optique par deux lentilles minces distantes l'une de l'autre et de même axe optique : une lentille convergente  $L_1$  de distance focale image  $f'_1$  et de centre optique  $O_1$  et une lentille  $L_2$  de distance focale image  $f'_2 = -6,5\text{ cm}$  et de centre optique  $O_2$  . Le document à photocopier se trouve à 42 cm de E et à 20 cm de  $O_1$  . En outre, la distance de  $O_2$  à E est aussi de 20 cm.

On suppose les conditions de gauss satisfaites dans tout le problème. Par ailleurs, on notera  $A_0$  un objet lumineux ponctuel du document à photocopier et  $A_i$  l'image ponctuelle correspondante sur l'écran E. En outre, on désignera par  $A_1$  l'image intermédiaire que donne  $L_1$  de  $A_0$ . On a ainsi la correspondance suivante :



1. Sur le papier millimétré fourni, on a positionné, l'écran E, et l'image  $A_i B_i$  (orthogonale à l'axe optique) . Représenter la lentille  $L_1$  et son centre  $O_1$ , la lentille  $L_2$  et son centre  $O_2$ , les foyers  $F_2$  et  $F'_2$  ainsi que la position de  $A_0$  du document à photocopier. Par construction géométrique, positionner  $A_1 B_1$  puis déterminer graphiquement  $\overline{O_2 A_1}$  .
2. Déterminer graphiquement la position de  $B_0$  . En déduire graphiquement la position du foyer  $F_1$  puis  $f'_1$  .
3. Établir l'expression **littérale** de la distance algébrique  $\overline{O_2 A_1}$  autrement dit la position de l'image intermédiaire  $A_1$  par rapport à  $O_2$  en fonction de  $\overline{O_2 A_i}$  et  $f'_2$  . Faire l'application numérique.
4. En déduire l'expression **littérale** de  $f'_1$  en fonction de  $\overline{O_2 A_1}$  ,  $\overline{O_1 A_0}$  et  $\overline{O_1 O_2}$  . Faire l'application numérique.
5. Déterminer graphiquement puis numériquement le grandissement transversale  $G_T$  du photocopieur, autrement dit de l'ensemble  $\{L_1, L_2\}$  ?
6. Déterminer la valeur du rapport  $\frac{S_c}{S_d}$  des surfaces du document copié et du document original.
7. La lentille  $L_1$  est en réalité un doublet de lentilles minces accolées,  $L_3$  et  $L_4$  ;  $L_3$  est identique à  $L_2$ . On fait glisser la lentille  $L_4$  pour l'accoler à  $L_2$ . Quel est le format du document copié ?

## PROBLÈME 2: Station de gonflage (barème sur 30 points)

On note  $t_i$  et  $T_i$  les températures respectivement en  $^{\circ}\text{C}$  et en  $\text{K}$ .

Données :  $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$  ,  $1\text{ bar} = 10^5\text{ Pa}$  , intensité de la pesanteur  $g = 9,8\text{ m.s}^{-2}$ .

Un poste mobile de gonflage de pneumatiques comporte un réservoir de volume  $V_1 = 15\text{ L}$  qu'on peut remplir d'air au poste fixe du garage sous la pression  $P_1 = 6,0\text{ bars}$ . L'air est assimilé à un gaz parfait.

1. La température du réservoir mobile est  $t_1 = 17^{\circ}\text{C}$  sous la pression  $P_1$ , calculer le volume  $V'_1$  qu'occuperait l'air contenu dans le réservoir s'il était détendu de manière isotherme à la pression  $P'_1 = 1,0\text{ bar}$ .

2. On utilise le poste mobile contenant de l'air sous la pression  $P_1$  à la température  $t_1$  pour compléter le gonflage d'un pneumatique de voiture à la température de  $17^\circ\text{C}$ .

La pression dans le pneu avant le gonflage est  $P_2 = 1,2$  bars, la pression recommandée par le constructeur est  $P_3 = 2,0$  bars et le volume  $V=35\text{L}$  de l'enveloppe supposé invariable. Établir l'expression du volume d'air introduit  $V_{\text{intr}}$  dans le pneumatique mesuré à  $17^\circ\text{C}$  sous  $P_1=6,0$  bars pour amener la pression dans le pneu à la valeur requise en fonction de  $V$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $P_3$ . Faire l'application numérique.

3. Établir l'expression de la pression finale  $P_4$  de l'air dans le poste mobile à la fin du gonflage à  $17^\circ\text{C}$  en fonction de  $V$ ,  $V_1$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $P_3$ . Faire l'application numérique.

4. Après un parcours effectué à grande vitesse, la pression dans le pneumatique atteint la pression  $P_5 = 6,0$  bars (pression maximale). Sachant que lorsque la température du pneu est supérieure à  $250^\circ\text{C}$ , la gomme se dégrade, risque-t-on l'explosion ?

5. La masse de la voiture  $m = 1,2 \cdot 10^3$  kg est également répartie sur les quatre pneumatiques. Déterminer la surface de contact  $S$  entre un pneumatique et le sol à la température de  $17^\circ\text{C}$  lorsque la voiture est à l'arrêt pneus gonflés correctement. On exprimera le résultat en  $\text{cm}^2$ .

6. Indiquer le choix de pression des pneumatiques pour éviter l'aquaplaning c'est à dire perte d'adhérence sur une route mouillée.

### **PROBLÈME 3: Instabilités et oscillations de relaxation** (*barème sur 120 points*)

Ce sujet est consacré à certaines situations physiques instables conduisant à des oscillations de relaxation. Ce terme désigne des oscillations non linéaires obtenues par l'augmentation continue d'une contrainte, suivie du relâchement subit de celle-ci. Le sujet est constitué de deux parties totalement indépendants sur cette thématique assez courante en physique.

Bien que les deux parties traitent de phénomènes physiques analogues, les méthodes développées sont totalement différentes :

— La partie I analyse un oscillateur historique de l'électronique linéaire. Il s'agit de l'emploi de méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles déduites des lois physiques, avec prise en compte d'un basculement périodique ;

— la partie II s'intéresse à une description analytique complète des équations du mouvement d'un solide frottant sur un support fixe et du crissement qui en résulte.

Les applications numériques seront réalisées avec un seul chiffre significatif. Lorsqu'un code informatique est demandé, il sera rédigé dans la syntaxe de Python 3. Un petit formulaire et quelques valeurs numériques sont regroupés en fin d'énoncé.

## Partie I : Oscillateur à tube

On considère le montage de la figure 1 comportant un générateur idéal de tension constante  $E_0$ , un résistor de résistance  $R$ , un condensateur de capacité  $C$  et un dipôle  $D$  assimilé à un résistor de résistance  $R_L = \alpha R$ .

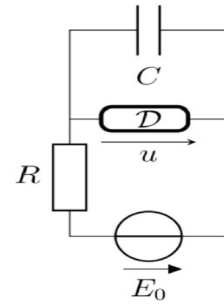


FIGURE 1 – Circuit

### I. A Une première équation d'évolution

1. Établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sous sa forme canonique vérifiée par  $u(t)$ . Il s'agit d'une équation caractérisée par une constante de temps  $\tau$  qu'on explicitera en fonction de  $RC$  et de  $\alpha$ .

La solution de l'équation précédente comporte d'une part une solution de l'équation homogène  $u_h(t)$  et d'autre part une solution particulière  $u_p(t)$ .

2. Laquelle de ces deux solutions correspond au régime libre ? Donner son expression en fonction des caractéristiques du circuit.
3. À quel régime correspond l'autre solution ? Donner son expression en fonction des caractéristiques du circuit.
4. Proposer un schéma simplifié du circuit pour déduire simplement l'expression correspondante  $u_\infty$  de  $u$  en fonction de  $\alpha$  et  $E_0$ .
5. Si l'on suppose le condensateur initialement déchargé, déterminer  $u(t)$ .

### I.B Un dipôle à deux états

En réalité, le dipôle  $D$  est une lampe contenant un gaz raréfié qui peut être dans deux états électriques (lampe éteinte ou allumée). Ces deux états correspondent chacun à une valeur de  $\alpha$ .

Le comportement électrique de  $D$  diffère selon son état : c'est un assez bon conducteur si elle est allumée, et un assez bon isolant si elle est éteinte.

6. Que peut-on dire a priori de  $\alpha$  si la lampe est éteinte ? si elle est allumée ?

On réalise le circuit avec  $R = 20\text{k}\Omega$  et  $C = 200\mu\text{F}$ . Lors du branchement initial du circuit, on admettra que la lampe est éteinte et le condensateur déchargé. Par la suite :

— la lampe reste éteinte tant que la tension à ses bornes vérifie  $|u| < U_a$  où  $U_a = 90\text{V}$  est la tension d'allumage ; dans ce cas elle a pour résistance  $R_e \gg R$ ;

— une fois allumée, la lampe a pour résistance  $R_a \approx 1\text{k}\Omega$ ; elle reste allumée sauf si la tension à ses bornes diminue trop et elle va donc s'éteindre dès lors que  $|u| < U_e$  où  $U_e = 70\text{V}$  est la tension d'extinction.

7. Exprimer et calculer  $\tau$  dans les deux régimes, successivement lampe éteinte  $\tau_e$  puis allumée  $\tau_a$ .
8. Exprimer la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  si la lampe ne s'allume jamais ; puis si elle reste allumée. En déduire que le système oscille seulement si  $E_0 > 0$  est compris dans un intervalle que l'on déterminera. Est-ce le cas avec  $E_0 = 120\text{V}$ , valeur choisie dans la suite ? Ces oscillations seront-elles observables à l'œil ?

### I.C Étude numérique du régime d'oscillation

On propose une étude numérique des oscillations au moyen d'un algorithme dérivé de la méthode d'Euler explicite pour l'étude de  $u(t)$  ; le passage de  $t$  à  $t + dt$  se fait au moyen de la fonction `Next` :

```
1 def Next(u, al, dt):
2     i = (E - u)/R
3     if al:
4         al = u >= Ue
5     else:
6         al = u > Ua
7     u += dt*(i - al*u/Ra)/C
8     return u, al
```

9. Quelle est la signification de la variable (logique) `al` ?

Quel est l'objectif des lignes 3 à 6 ?

Justifier, au moyen d'un schéma électrique, la ligne 7.

On propose enfin de tracer l'allure de la courbe représentative de  $u(t)$  au moyen du code ci-après :

```

1 E = 120.0
2 R = 2.0E4
3 C = 200.0E-6
4 Ua = 90.0
5 Ue = 70.0
6 Ra = 1.0E3
7 tmax = 20.0
8
9 def Etude(tmax, N, u0, all0):
10     h = tmax/N
11     t, u, all = 0, u0, all0
12     LT = LU = []
13
14     for k in range(N):
15         LT.append(t)
16         LU.append(u)
17         t = t + h
18         u, all = Next(u, all, h)
19     pl.figure()
20     pl.plot(LT, LU)
21     pl.show()

```

suivi de l'exécution des lignes :

```

1 import matplotlib.pyplot as pl
2 Etude(tmax, 500, 0, False)

```

**10.** Le tracé sera-t-il satisfaisant ?

Si non, quelle(s) modification(s) proposez-vous ?

Après rectification si nécessaire, l'allure du tracé obtenu est représenté figure 2.

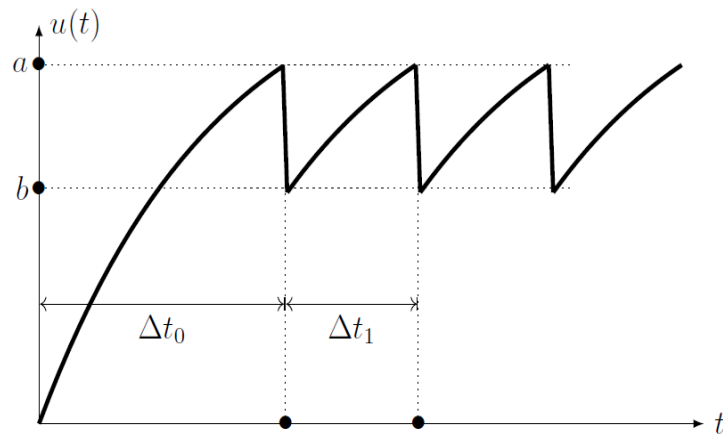


FIGURE 2 – Tracé de  $u(t)$  par la méthode numérique proposée

**11.** Sur la figure 2, identifier les phases où la lampe est allumée et celles où elle est éteinte ;

quelle est la valeur de  $a$  ?

La valeur de  $b$  dépend en fait du paramètre  $N$  de la fonction `Etude`; avec  $N = 500$  on trouve par exemple  $b \approx 59V$ . Expliquer pourquoi cette valeur reste inférieure à  $70V$  ?

## Partie II : Le crissement

### II.A Les lois de Coulomb

Les crissements et grincements qui caractérisent certains frottements sont des oscillations de relaxation. La fréquence des relaxations est aussi celle de l'onde sonore émise, qui est souvent désagréable à entendre, notamment à cause de sa position dans la gamme des sons aigus. Nous allons en donner une description très simplifiée, dans le cadre des lois, dites de Coulomb, qui régissent le frottement de glissement d'un solide ( $\Sigma$ ) en translation relativement à un support fixe ( $F$ ).

Nous supposons ici l'existence (figure 7) d'une surface de contact plane entre ( $\Sigma$ ) et ( $F$ ).

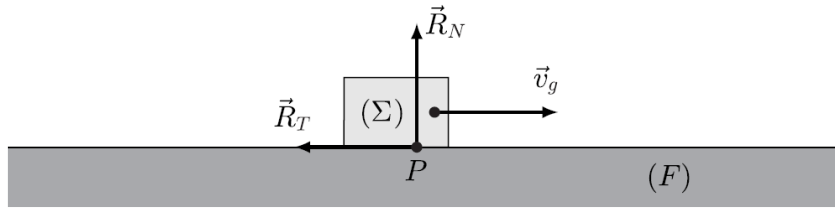


FIGURE 7 – Lois de Coulomb du frottement de glissement

Ces lois décrivent la force de contact  $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$  exercée par le support ( $F$ ) sur le solide ( $\Sigma$ ). Il s'agit d'une force exercée en un point  $P$  de la surface de contact des deux solides ; elle peut être décomposée en une partie  $\vec{R}_T$  colinéaire à la surface de contact des deux solides et une autre  $\vec{R}_N$  perpendiculaire à celle-ci.

Les lois de Coulomb distinguent deux situations :

- Lorsque ( $\Sigma$ ) est en mouvement à la vitesse  $\vec{v}_g$  (dite vitesse de glissement),  $\vec{R}_T$  est colinéaire à  $\vec{v}_g$ , de sens inverse et de norme proportionnelle à celle de  $\vec{R}_N$ ,  $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ , où le coefficient  $f_d > 0$  porte le nom de coefficient de frottement dynamique ; il reste constant pendant tout le mouvement et ne dépend que de l'état de surface des deux solides en contact.
- Lorsque le mouvement de ( $\Sigma$ ) cesse,  $\vec{v}_g = \vec{0}$  et la composante tangentielle vérifie nécessairement la condition  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$  où le coefficient  $f_s$  porte le nom de coefficient de frottement statique ; lui aussi ne dépend que de l'état de surface des solides.

### II.B Le modèle de crissement

Lorsqu'on appuie une craie sur un tableau noir avant de la déplacer, on entend parfois distinctement le bruit du crissement lors du déplacement de la craie. Pour étudier cette situation, on modélise (figure 8) la craie et son appui par un solide rectangulaire ( $\Sigma$ ) de masse  $M$  attaché à un ressort ; le tableau noir par un support fixe ( $F$ ) confondu avec le plan horizontal ( $Oxy$ ) ; le déplacement, par le mouvement à vitesse constante  $v_0$  de l'extrémité  $A$  du ressort élastique de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .

Le ressort reste constamment parallèle à l'axe ( $Ox$ ), à  $t = 0$  il est à sa longueur naturelle  $l_0$ . L'autre extrémité du ressort, notée  $H$ , est liée au mobile ( $\Sigma$ ) ; c'est sa vitesse que l'on souhaite étudier. À l'instant  $t = 0$ , on a  $x_H(0) = -l_0$ . On note enfin  $f_s > f_d$  les coefficients de frottement statique et dynamique de la craie sur le tableau et  $\|\vec{g}\| = g$  l'accélération de la pesanteur.

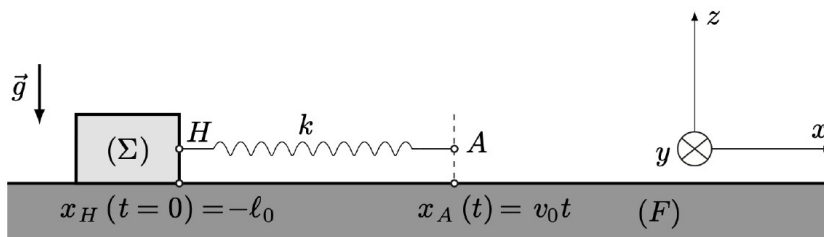


FIGURE 8 – Un modèle pour le crissement

12. Exprimer la force de traction exercée par le ressort sur le mobile en fonction de  $k$ ,  $v_0$ ,  $t$  et de  $X_H(t) = x_H(t) + l_0$ .

Exprimer aussi la composante normale  $\vec{R}_N$  de la force de contact exercée sur la craie.

13. En déduire qu'à partir de  $t = 0$  la craie reste immobile jusqu'à l'instant  $t = t_0$  que l'on déterminera en fonction de  $f_s$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $k$  et  $v_0$ .

14. On pose  $\tau = t - t_0$ . Préciser les valeurs de  $x_A$ , de  $X_H$  et de sa dérivée  $V_H = \frac{dX_H}{d\tau}$  à l'instant  $\tau = 0$  avant d'expliciter l'équation

différentielle vérifiée par  $X_H(\tau)$  sous la forme :  $\frac{d^2 X_H}{d\tau^2} + \omega^2 X_H = \omega^2 v_0 \tau + \gamma$  où l'on exprimera les constantes  $\omega$  et  $\gamma$  en fonction de  $k, M, g, f_s$  et  $f_d$ .

## II.C Étude du mouvement de crissement

La suite du mouvement du mobile se poursuit en alternant les étapes d'immobilité et de glissement; le mouvement ainsi observé est périodique de pulsation  $\Omega$  et il est la cause du bruit de crissement, par exemple, de la craie sur un tableau.

On pourra se reporter au formulaire donné à la fin de cette partie.

15. Déterminer les expressions de  $X_H(\tau)$  et  $V_H(\tau)$  en fonction de  $\tau, v_0, \omega$  et  $\alpha = \frac{\gamma}{\omega v_0}$ .

On note  $\tau_{max}$  le premier instant où  $V_H$  atteint sa valeur maximale  $V_{max}$  et  $\theta_{max} = \omega \tau_{max}$ .

16. Montrer que :  $V_{max} = v_0 (1 + \sqrt{1 + \alpha^2})$

17. Tracer l'allure de la courbe donnant  $V_H(\tau)$  puis montrer alors que cette vitesse s'annule à nouveau à un instant  $\tau_1 > 0$  correspondant à l'angle  $\theta_1 = \omega \tau_1$  dont on exprimera le cosinus et le sinus en fonction de  $\alpha$ . On admettra dans la suite que  $0 < \alpha < 1$ .

La première mise en mouvement du mobile ( $\Sigma$ ) correspond à l'intervalle  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ . À l'issue de cette phase, il s'immobilise alors pendant un laps de temps avant de redémarrer par la suite.

On rappelle que la longueur du ressort est donnée à chaque instant par  $l = x_A - x_H$ .

18. Déterminer l'expression de  $l(\tau)$  et en déduire la longueur du ressort  $l(0)$  à l'instant  $\tau = 0$ .

Montrer qu'à l'instant  $\tau_1$  elle est devenue :  $l(\tau_1) = l(0) - \frac{2\alpha v_0}{\omega}$ .

19. En déduire la durée  $\tau_2$  qui devra alors s'écouler avant que le mobile se remette en mouvement. Compléter alors le tracé de la question précédente en faisant apparaître une période  $T$  complète du mouvement du mobile ; préciser sur ce schéma dans quelle phase du mouvement il y a augmentation continue d'une contrainte et dans quelle phase il y a relâchement subit de celle-ci.

20. Exprimer  $\Omega$  en fonction de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  puis en fonction de  $\omega, \alpha$  et  $\theta_1$ .

21. Pour estimer les ordres de grandeur du phénomène, on prend  $\theta_{max} = 5\pi/6$  avec un frottement caractérisé par  $f_s \approx 1$  et  $f_d \approx 0,6$  pour une vitesse de traction du ressort  $v_0 = 1 \text{ cm/s}$ .

On prendra  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ . En déduire les valeurs numériques de  $\alpha$ , puis de  $\Omega$ .

Quel lien existe-t-il entre cette pulsation et celle du son émis ?

Préciser et justifier le domaine fréquentiel du crissement.

## Formulaire et données numériques pour le problème 3 :

On donne  $\ln(2) = 0,7$  et  $\ln(3) = 1,1$ .

Si  $t = \tan \theta$  alors  $\cos^2 \theta = \frac{1}{1+t^2}$  et  $\sin^2 \theta = \frac{t^2}{1+t^2}$ .

On rappelle par ailleurs que  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  et  $\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$ .

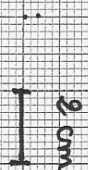
On pourra prendre  $\sqrt{3} \approx 1,73, \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58, \pi \approx 3,14$  et  $2/\pi \approx 0,64$ ;

**Fin de l'épreuve**

Nom Prénom :

N°
.../.../...

Echelle :



Exon



## Correction préparation\_1 concours blanc

### Problème 1 : Étude d'un photocopieur(d'après ENAC 2017)

1. Pour déterminer la position de  $A_i B_i$ , on trace le rayon passant par  $B_i$  et  $O_2$  qui n'est pas dévié, puis le rayon passant par  $B_i //$  à l'axe. Ce rayon provient d'un rayon incident passant par  $F_2$ .  $B_i$  est l'intersection des rayons incidents. On

détermine graphiquement  $\overline{O_2 A_i} \approx 5 \text{ cm}$ .

2. Par construction : On trace le rayon passant par  $B_i$  et  $O_1$  qui n'est pas dévié. Le point d'intersection de ce rayon avec le support à photocopier est  $B_0$ . Ensuite, on trace le rayon passant par  $B_i //$  à l'axe, ce rayon est

issu d'un rayon incident passant par  $F_1$  et  $B_0$ . On détermine graphiquement  $f'_1 \approx 5,2 \text{ cm}$ .

3. D'après la formule de conjugaison :  $\frac{1}{\overline{O_2 A_i}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2}$  d'où :  $\overline{O_2 A_i} = \frac{f'_2 \times \overline{O_2 A_1}}{f'_2 - \overline{O_2 A_1}} = \frac{-6,5 \times 20}{-6,5 - 20} = 4,9 \text{ cm} > 0$

4. D'après la formule de conjugaison :  $\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A_0}} = \frac{1}{f'_1}$  d'où

$$f'_1 = \frac{\overline{O_1 A_0} \times \overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A_0} - \overline{O_1 A_1}} = \frac{\overline{O_1 A_0} \times (\overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_1})}{\overline{O_1 A_0} - (\overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_1})} = \frac{-20 \times 6,9}{-20 - 6,9} = 5,1 \text{ cm} > 0$$

5. Graphiquement  $G_T = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{6}{-4,2} = -1,4$

Numériquement  $G_T = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_1 B_1}} \times \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{\overline{O_2 A_i}}{\overline{O_2 A_1}} \times \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A_0}} = \frac{20}{4,9} \times \frac{6,9}{-20} = -1,4$  (les résultats sont concordants).

6.  $\frac{S_c}{S_d} = G_T^2 \approx 2$ .

7.  $V_1 = V_3 + V_4$  d'où  $V_4 = V_1 - V_3 = \frac{10^2}{5,1} + \frac{10^2}{6,5} = 34,99 \delta$  d'où  $f'_4 = \frac{1}{V_4} = 2,86 \text{ cm} \approx 2,9 \text{ cm}$ . Au niveau de la

lentille  $L_2$ , la nouvelle vergence est  $V_5 = V_2 + V_4 = \frac{-10^2}{6,5} + 34,99 = 19,6$  d'où  $f'_5 = 5,1 \text{ cm}$

Il suffit ensuite de reprendre les formules littérales.

$$\overline{O_2 A_i} = \frac{f'_5 \times \overline{O_2 A_1}}{f'_5 - \overline{O_2 A_1}} = \frac{5,1 \times 20}{5,1 - 20} = -6,85 \text{ cm} > 0$$

$$\overline{O_1 A_1} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_1} = 2 - 6,85 = -4,85 \text{ cm}$$

$$G_T = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_1 B_1}} \times \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_0 B_0}} = \frac{\overline{O_2 A_i}}{\overline{O_2 A_1}} \times \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A_0}} = \frac{20}{(-6,85)} \times \frac{(-4,85)}{-20} = 0,7 \text{ et } \frac{S_c}{S_d} = G_T^2 \approx 0,5$$

Le format de sortie du document est A5.



## Problème 2 : gonflage de pneus

1. L'équation des gaz parfaits permet d'écrire :  $P_1 V_1 = n R T_1 = P'_1 V'_1$  car la transformation est isotherme.

On en déduit :  $V'_1 = V_1 \frac{P_1}{P'_1} = 90 \text{ L}$

2. La quantité de matière finale dans le pneumatique  $n_f$  vérifie  $P_3 V = n_f R T_1$  et la quantité de matière initiale dans le pneumatique  $n_i$  vérifie :  $P_2 V = n_i R T_1$ . On introduit dans le pneumatique la quantité  $n_{intr} = n_f - n_i = \frac{P_3 V - P_2 V}{R T_1}$  soit

$n_{intr} = \frac{V}{R T_1} (P_3 - P_2)$ . Le volume introduit vérifie l'équation  $n_{intr} R T_1 = P_1 V_{intr}$  d'où  $V_{intr} = \frac{n_{intr} R T_1}{P_1}$  d'où

$V_{intr} = \frac{V}{P_1} (P_3 - P_2) = 4,7 \text{ L}$ .

3. Dans le poste de gonflage, on avait initialement une quantité de matière  $n_0$  telle que :  $P_1 V_1 = n_0 R T_1$ . Après l'opération, il ne reste plus que  $n_0 - n_{intr}$  et la pression est  $P_4$  telle que :  $P_4 V_1 = (n_0 - n_{intr}) R T_1$  en explicitant  $n_0$  et  $n_{intr}$  on

obtient :  $P_4 V_1 = \left( \frac{P_1 V_1}{R T_1} - \frac{V (P_3 - P_2)}{R T_1} \right) R T_1$  d'où  $P_4 = P_1 - \frac{V}{V_1} (P_3 - P_2) = 4,1 \text{ b}$

4. Le volume du pneumatique et la quantité de matière étant constants, on a  $\frac{P_3}{T_1} = \frac{P_5}{T_5}$  donc  $T_5 = T_1 \frac{P_5}{P_1} = 870 \text{ K}$  soit

$t_5 = 597^\circ \text{ C}$ . Il y a risque d'explosion.

5. On considère pour le système constitué par la partie du pneu dont la surface  $S$  est en contact avec le sol.

Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen.

Les forces s'exerçant sur ce système sont :

- La réaction du sol verticale ascendante dont la norme est égale au poids de la voiture (on déduit ce résultat en appliquant la 2ème loi de Newton à la voiture immobile) :  $R = \frac{m g}{4}$ .

- La force de pression verticale descendante due à l'air dans le pneu  $F_p = P_3 S$ .

Le pneumatique étant à l'équilibre les 2 forces se compensent d'où  $\frac{m g}{4} = P_3 S$  soit :

$S = \frac{m g}{4 P_3} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \times 9,8}{4 \times 2 \cdot 10^5} = 1,47 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 = 147 \text{ cm}^2$ .

6. La surface de contact diminue avec la pression. En présence d'eau, il faut l'évacuer au mieux, ce qui sera plus facile avec une surface de contact légèrement plus faible. Par conséquent, les pneus seront légèrement surgonflés.

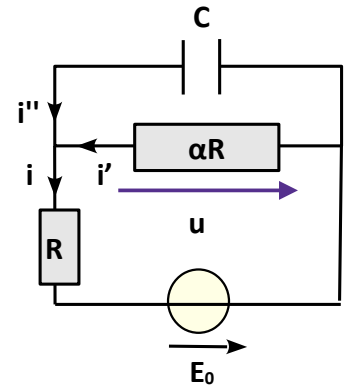
### Problème 3 : Instabilités et oscillations de relaxation (d'après mines-ponts MPI 2024)

1) On applique la loi des nœuds dans le circuit ci-contre :  $i = i' + i''$  (1) or  $u = E_0 - Ri$  d'où

$$i = \frac{E_0 - u}{R} \text{ de plus } u = \alpha R i' \text{ d'où } i' = \frac{u}{\alpha R} \text{ et enfin } i'' = C \frac{du}{dt}. \text{ En remplaçant}$$

chaque intensité dans (1) on obtient :  $\frac{E_0 - u}{R} = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{\alpha R}$  d'où  $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E_0}{RC}$

avec  $\tau = \frac{\alpha RC}{1 + \alpha}$

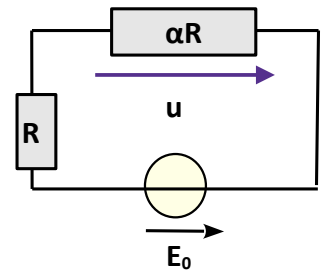


2) Le régime libre correspond à :  $u_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$ . A est une constante que l'on détermine grâce aux conditions initiales.

3) L'autre solution correspond au régime permanent :  $u_p(t) = \frac{E_0 \tau}{RC} = \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha}$

4)  $u \infty$  correspond au régime permanent. Le condensateur est alors équivalent à un interrupteur ouvert. Le circuit à considérer est représenté ci-contre. Grâce à la formule du pont diviseur de

tension, on trouve :  $u_\infty = \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha}$



5) D'après les conditions initiales,  $u(0+) = 0$  par continuité de la tension aux bornes du condensateurs ainsi  $u(0+) = u_h(0+) + u_p(0+) = A + \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha}$  d'où  $A = \frac{-\alpha E_0}{1 + \alpha}$  d'où

$$u(t) = \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

6) Si la lampe est allumée la résistance sera plus petite que si la lampe est éteinte donc  $\alpha_{allumée} < \alpha_{éteinte}$

7) Lampe éteinte :  $\alpha_{éteinte} = \frac{R_e}{R} \gg 1$  d'où  $\tau_e = \frac{\alpha RC}{1 + \alpha} \approx RC = 20 \cdot 10^3 \times 200 \cdot 10^{-6} = 4 \text{ s}$

Lampe allumée  $\alpha_{allumée} = \frac{R_a}{R} = \frac{10^3}{20 \cdot 10^3} = 0,05$  d'où  $\tau_a = \frac{\alpha RC}{1 + \alpha} = \frac{0,05 \times 20 \cdot 10^3 \times 200 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,05} \approx 0,2 \text{ s}$

8) Lampe éteinte  $u_\infty(éteinte) = \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha} \approx E_0$  ; Lampe allumée  $u_\infty(allumée) = \frac{\alpha E_0}{1 + \alpha} \approx \alpha E_0 = 0,05 E_0$

Il faut que  $u_\infty(éteinte) \geq U_a$  pour que la lampe s'allume soit  $E_0 \geq U_a = 90 \text{ V}$ . Une fois la lampe allumée il faut que

$u_\infty(allumée) \leq U_e$  pour que la lampe s'éteigne soit  $\alpha E_0 \leq U_e = 70 \text{ V}$  d'où  $E_0 \leq \frac{70}{0,05} = 1400 \text{ V}$

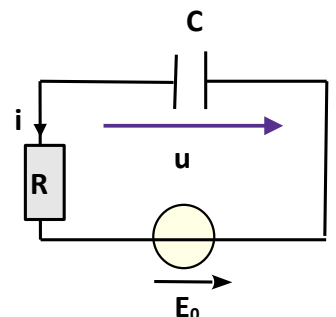
Finalement :  $90 \text{ V} \leq E_0 \leq 1400 \text{ V}$ . La valeur choisie  $E_0 = 120 \text{ V}$  permettra d'observer les oscillations. Le temps de réponse de l'oeil est d'environ 0,1s, les oscillations seront observables.

9) al prend la valeur True (1) quand la lampe D est allumée et False (0) quand la lampe est éteinte.

Les lignes 3 à 6 testent le caractère allumé ou éteint de D.

Si D allumée, on vérifie qu'elle le reste ou pas. (ligne 4)

Si D éteinte, on vérifie qu'elle le reste ou pas.



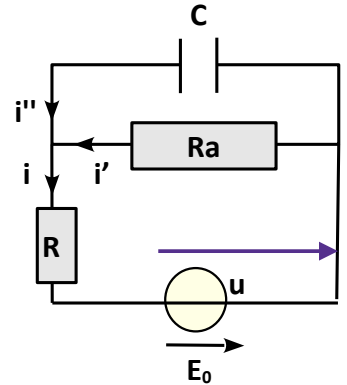
La ligne 7 permet de calculer  $u(t+dt) = u(t) + dt \left( \frac{du}{dt} \right)$

Si D reste éteinte, elle est équivalente à une résistance infinie, le circuit équivalent est représenté ci-contre.  $i(t)$  vérifie alors  $i = C \left( \frac{du}{dt} \right)$  donc  $\left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{i}{C}$  si bien que  $u(t+dt) = u(t) + dt \times \frac{i}{C}$  ce qui correspond à la formule de la ligne 7 quand  $a=0$  (lampe éteinte)

Si D est allumée, le circuit à considérer est représenté ci-contre.  $i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_a}$  (Q1)

soit  $\frac{du}{dt} = \frac{i - \frac{u}{R_a}}{C}$  d'où  $u(t+dt) = u(t) + dt \times \frac{i - \frac{u}{R_a}}{C}$  ce qui correspond à la

ligne 7 quand  $a=1$  (lampe allumée).



10) Le code ne convient pas à la ligne 12 car  $LT=LU=[]$  affecte à  $LT$ ,  $LU$ , il aurait fallu écrire  $LT=[]$  et  $LU=[]$ .

11) D est éteinte sur les parties croissantes et allumée sur les parties décroissantes.

$$a = U_a = 90 \text{ V}$$

.  $b$  est inférieur à  $70 \text{ V}$  le pas de temps  $t_{\max}/500 \text{ n}$  n'est pas assez petit devant  $\tau_a$  pour que la phase de décroissance soit correctement décrite.

## Partie II : Le crissement

12) La longueur du ressort est  $l = x_A - x_H$ ; La force de traction étant donnée l'orientation de l'axe  $x$  est :

$\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u}_x = k(x_A - x_H - l_0)\vec{u}_x = k(v_0 t - (X_H - l_0) - l_0)\vec{u}_x$  d'où  $\vec{F} = k(v_0 t - X_H)\vec{u}_x$ . Comme il n'y a pas de mouvement suivant la verticale la somme des forces dans cette direction est nulle d'après la 2ème loi de Newton soit :  $\vec{P} + \vec{R}_N = \vec{0}$  d'où  $\vec{R}_N = -Mg\vec{u}_z$ .

13) La craie reste immobile tant que la somme des forces horizontales est nulle soit  $\vec{F} + \vec{R}_T = \vec{0}$  or la craie est immobile tant que  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$  soit  $\|\vec{F}\| \leq f_s Mg$ . La craie n'ayant pas encore bougé  $X_H = X_H(t=0) = 0$  d'où  $\|\vec{F}\| = k v_0 t$  d'où

$$k v_0 t \leq f_s Mg \text{ d'où } t \leq t_0 = \frac{f_s M g}{v_0 k}$$

14) Si  $\tau = 0$  alors  $t = t_0$  d'où  $x_A = v_0 t_0 = \frac{f_s M g}{k}$ .  $X_H = 0$ . La vitesse de H est nulle à  $\tau = 0$  d'où

$$\frac{dX_H}{d\tau} = 0 \text{ . D'après la 2ème loi de Newton appliquée à la craie en mouvement suivant } x :$$

$$M \ddot{X}_H \vec{u}_x = k(v_0 t - X_H)\vec{u}_x - \|\vec{R}_T\| \vec{u}_x \text{ or } \|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\| = f_d M g \text{ et } t = \tau + t_0 = \tau + \frac{f_s M g}{v_0 k} \text{ d'où}$$

$$M \ddot{X}_H = k(v_0 \tau + \frac{f_s M g}{k} - X_H) - f_d M g \text{ d'où } M \ddot{X}_H + k X_H = k v_0 \tau + f_s M g - f_d M g \text{ d'où}$$

$$\ddot{X}_H + \frac{k}{M} X_H = \frac{k v_0 \tau}{M} + g(f_s - f_d) \text{ . Par identification : } \omega^2 = \frac{k}{M} \text{ et } \gamma = g(f_s - f_d) \text{ .}$$

15)  $X_H(\tau) = A \cos(\omega \tau) + B \sin(\omega \tau) + v_0 \tau + \frac{\gamma}{\omega^2}$  (solution homogène + solution particulière)

$$X_H(0)=0=A+\frac{\gamma}{\omega^2} \text{ d'où } A=\frac{-\gamma}{\omega^2} ; \dot{X}_H(\tau)=-A\omega \sin(\omega\tau)+B\omega \cos(\omega\tau)+v_0 \text{ d'où } \dot{X}_H(0)=B\omega+v_0 \text{ d'où}$$

$$B=\frac{-v_0}{\omega} . \text{ On obtient : } X_H(\tau)=\frac{-\gamma}{\omega^2} \cos(\omega\tau)-\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega\tau)+v_0\tau+\frac{\gamma}{\omega^2} . \text{ On sait que } \alpha=\frac{\gamma}{\omega v_0} \text{ d'où}$$

$$\frac{\gamma}{\omega^2}=\frac{\alpha v_0}{\omega} . \text{ Finalement :}$$

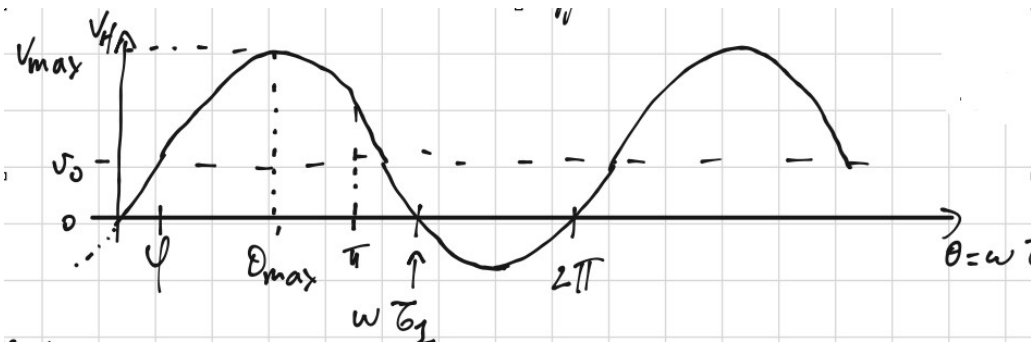
$$X_H(\tau)=\frac{\alpha v_0}{\omega} [1-\cos(\omega\tau)]-\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega\tau)+v_0\tau \text{ et } V_H(\tau)=v_0(1+\alpha \sin(\omega\tau)-\cos(\omega\tau))$$

16) On pose  $\alpha \sin(\omega\tau)-\cos(\omega\tau)=X_m \sin(\omega\tau-\varphi)=X_m \sin(\omega\tau) \cos\varphi-X_m \cos(\omega\tau) \sin\varphi$  . Par identification :

$$\alpha=X_m \cos(\varphi) \text{ et } 1=X_m \sin(\varphi) \text{ d'où } X_m=\sqrt{1+\alpha^2} . \text{ Finalement } V_H(\tau)=v_0(1+\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega\tau-\varphi))$$

$$V_H \text{ est max quand } \sin(\omega\tau-\varphi)=1 \text{ d'où } V_{max}=v_0(1+\sqrt{1+\alpha^2}) .$$

17)



$$V_H(0)=V_H(\tau_1)=v_0(1+\sqrt{1+\alpha^2} \sin(-\varphi))=v_0(1+\sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega\tau_1-\varphi)) \text{ d'où } \sin(-\varphi)=\sin(\omega\tau_1-\varphi)$$

$$\text{d'où } \omega\tau_1-\varphi=-(-\varphi+\pi) \text{ d'où } \omega\tau_1=2\varphi+\pi \text{ d'où } \sin(\omega\tau_1)=\sin(2\varphi+\pi)=-\sin(2\varphi)=-2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\text{or } \sin(\varphi)=\frac{1}{X_m}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \text{ et } \cos(\varphi)=\frac{\alpha}{X_m}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} . \text{ Finalement } \sin(\omega\tau_1)=\sin(\theta_1)=\frac{-2\alpha}{1+\alpha^2} .$$

$$\cos(\omega\tau_1)=\cos(2\varphi+\pi)=-\cos(2\varphi)=-\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{-\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{1}{1+\alpha^2} \text{ d'où}$$

$$\cos(\omega\tau_1)=\cos(\theta_1)=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} .$$

18)  $l(\tau)=x_A-x_H=x_A-(X_H-l_0)=x_A-X_H+l_0=v_0 t+l_0-X_H=v_0 t_0+l_0+v_0(t-t_0)-X_H=l(0)+v_0\tau-X_H$  d'

$$\text{où } l(\tau)=l(0)+v_0\tau-\frac{\alpha v_0}{\omega} [1-\cos(\omega\tau)]+\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega\tau)-v_0\tau \text{ d'où}$$

$$l(\tau)=l(0)-\frac{\alpha v_0}{\omega} [1-\cos(\omega\tau)]+\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega\tau) . \text{ D'où } l(\tau_1)=l(0)-\frac{\alpha v_0}{\omega} [1-\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}]-\frac{v_0}{\omega} \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \text{ d'où}$$

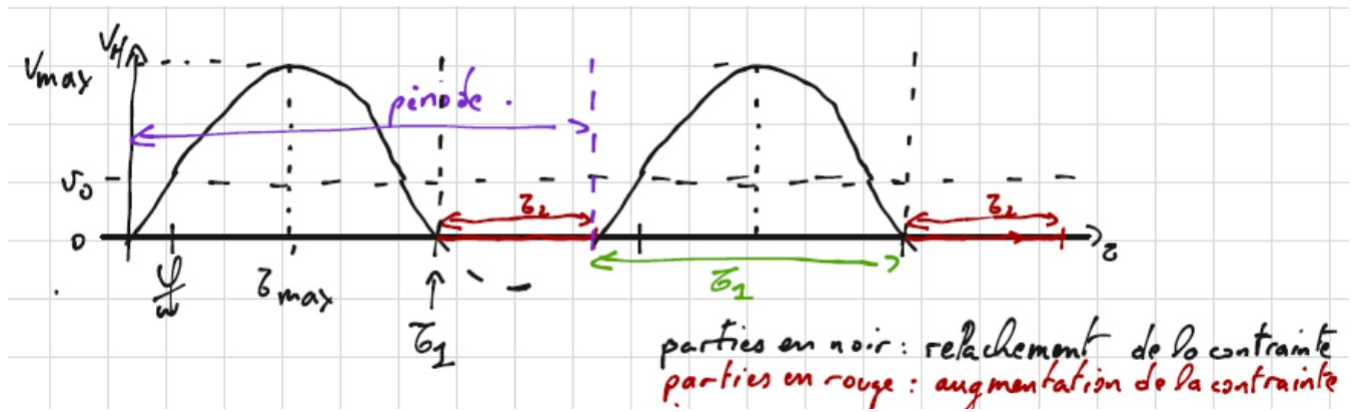
$$l(\tau_1)=l(0)-\frac{\alpha v_0}{\omega} [\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}]-\frac{v_0}{\omega} \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}=l(0)-\frac{\alpha v_0}{\omega} [\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}]-\frac{v_0}{\omega} \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}=l(0)-2 \frac{\alpha v_0}{\omega} (\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2}) \text{ d'où}$$

$$l(\tau_1)=l(0)-2 \frac{\alpha v_0}{\omega} .$$

19) La phase collée durera jusqu'à ce que  $k(l-l_0)=f_s M g$  et  $l(\tau_1+\tau_2)=l(\tau_1)+v_0\tau_2$  soit

$$k(l(\tau_1)+v_0\tau_2-l_0)=f_s M g \text{ et } l(\tau_1)=l(0)-2 \frac{\alpha v_0}{\omega} \text{ avec } l(0)=l_0+\frac{f_s M g}{k} \text{ d'où}$$

$$k(l_0+\frac{f_s M g}{k}-2 \frac{\alpha v_0}{\omega}+v_0\tau_2-l_0)=f_s M g \text{ d'où } \tau_2=\frac{2\alpha}{\omega} .$$



$$20) T = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\theta_1}{\omega} + \frac{2\alpha}{\omega} \quad \text{d'où} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\omega}{\theta_1 + 2\alpha}$$

$$21) V_H \text{ est max quand } \sin(\omega\tau - \varphi) = 1 \text{ d'où } \sin(\theta_{\max} - \varphi) = 1 \text{ soit } \theta_{\max} - \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \varphi = \theta_{\max} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Dans la question 16, on a vu que } \tan \varphi = \alpha \text{ d'où } \alpha = \sqrt{3} \text{ d'où } \cos(\omega\tau_1) = \cos(\theta_1) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1 - 3}{1 + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{D'où } \theta_1 = 2\frac{\pi}{3} \text{ d'où } \Omega = \frac{2\pi\omega}{2\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}} = \frac{\pi\omega}{\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}} = 3,14 \frac{\omega}{2,73} \approx \omega \text{ d'où}$$

$$\Omega = \frac{2\pi\omega}{2\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}} = \frac{\pi\omega}{\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}} = 3,14 \frac{\omega}{2,73} \approx \omega \text{ d'où}$$

$$\Omega = \frac{\gamma}{\alpha v_0} = (f_s - f_d) \frac{g}{\alpha v_0} = \frac{0,4 \times 10}{\sqrt{3} \times 10^{-2}} = 0,58 \times 400 = 232 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{d'où } f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{0,58 \times 400}{2\pi} = \frac{0,58 \times 2}{\pi} \times 100 = 0,58 \times 0,64 \times 100 = 37 \text{ Hz} \text{ domaine audible. Plus la vitesse est lente et plus le son émis est aigu.}$$

$$24) \theta_{\max} = \pi - \arctan \alpha = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \arctan \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ et } \alpha \ll 1. \arctan \alpha \approx \alpha.$$

$$\alpha \approx \frac{\pi}{6} \text{ d'où } \Omega \approx \omega$$

$$\omega = \frac{\gamma}{\alpha v_0} = \frac{(f_s - f_d) g}{\alpha v_0} = \frac{0,4 \times 10}{\frac{\pi}{6} \cdot 10^{-2}} = \frac{24}{\pi} \cdot 10^2 = 1,2 \times \frac{2}{\pi} \cdot 10^3$$

$$\begin{array}{r} 0,64 \\ \times 1,2 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 7,68 \end{array}$$

$$\Omega \approx \omega \approx 8 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (1CS)}$$

$$\text{fréquence } f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \cdot 10^2 \text{ Hz} \text{ domaine audible.}$$

$$7,7 \mid 6,3$$

si l'émission sonore est linéaire alors la pulsation du son émis sera égale à  $\Omega$ .