I - Récupération de l'énergie de vibration

I.1 Étude en régime libre

1. Je recherche la position d'équilibre du système {danseur + dalle} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. À l'équilibre, la somme des forces est nulle

$m\vec{g} - k\left(\ell_{éq} - \ell_0\right)\vec{e_z} = \vec{0}$ avec $\ell_{éq} = z_{éq} - 0$

En projection sur $\vec{e_z}$, $-mg - k\left(z_{éq} - \ell_0\right) = 0 \Rightarrow \boxed{z_{éq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$

NB : Il n'y a que deux forces agissant sur le système
Il n'y a pas de réaction du sol car le système ne touche pas le sol
D'éventuels frottements fluides n'interviennent pas sur la position d'équilibre $\left(\vec{v_{éq}} = \vec{0}\right)$

2. La seconde loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} - k\left(\ell_{éq} - \ell_0\right)\vec{e_z}$ en faisant l'hypothèse de frottements négligeables.

En projection sur $\vec{e_z}$, $m\ddot{z} = -mg - k\left(z - \ell_0\right) \Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + kz = -mg + k\ell_0}$

NB : la projection sur $\vec{u_z}$ de l'accélération est toujours $\ddot{z}$ par définition.

3. Je reconnais une équation différentielle harmonique $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)$

Par identification avec ♥ $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{éq}$, je retrouve $z_{éq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$ et j'obtiens $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$.

La solution est ♥ $\boxed{z(t) = z_{éq} + K_1\cos(\omega_0 t) + K_2\sin(\omega_0 t)}$ ou $z(t) = z_{éq} + K\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Le mouvement est rectiligne et sinusoïdal autour de la position d'équilibre.

4. La seconde loi de Newton s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} - k\left(\ell_{éq} - \ell_0\right)\vec{u_z} - \alpha\vec{v}$

En projection sur $\vec{u_z}$, $m\ddot{z} = -mg - k\left(z - \ell_0\right) - \alpha\dot{z} \Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -mg + k\ell_0}$

NB : la projection sur $\vec{u_z}$ de la vitesse est toujours $\dot{z}$ par définition.

5. Je reconnais l'équation différentielle $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right)$.

Par identification avec $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$, je retrouve $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\boxed{z_e = \ell_0 - \frac{mg}{k}}$

et j'obtiens $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$

NB : la position d'équilibre se nomme dorénavant z_e et plus $z_{éq}$.

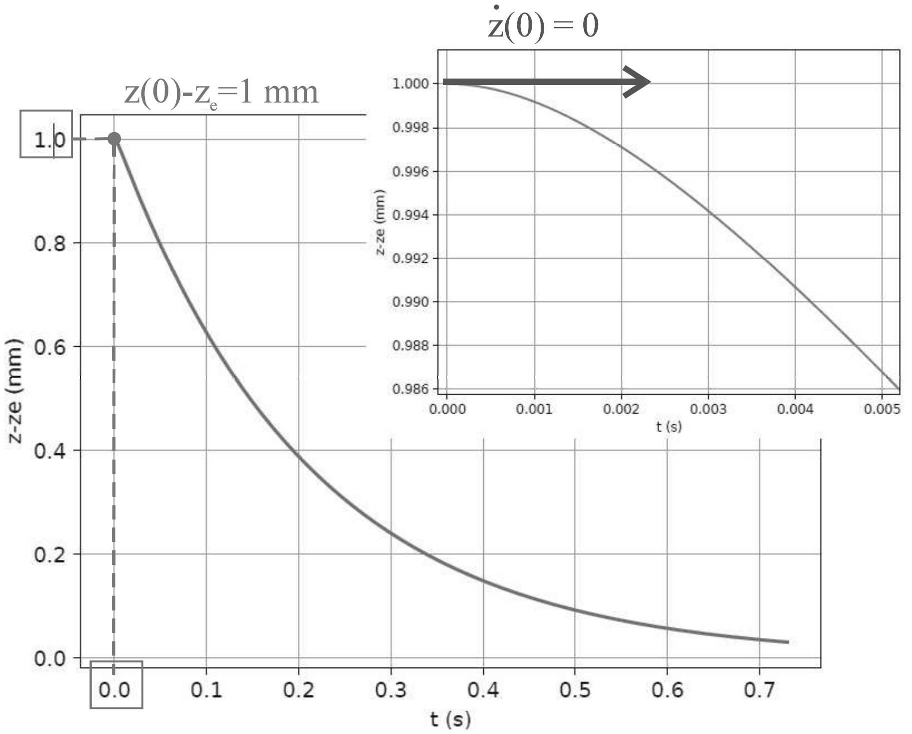
6. Il y a trois régimes libres amortis possibles ♥

Apériodique pour $Q<\dfrac{1}{2}$ Critique pour $Q=\dfrac{1}{2}$ Pseudopériodique pour $Q>\dfrac{1}{2}$	Pour le système, $Q=0{,}11<\dfrac{1}{2}$ donc il est en régime libre amorti apériodique.

NB : équation caractéristique $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$, $\Delta=\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\dfrac{4\omega_0^2}{Q^2}\left(\dfrac{1}{4}-Q^2\right)$

Apériodique $\Delta>0$ (fort amortissement), critique $\Delta=0$, pseudopériodique $\Delta<0$ (faible amortissement)

7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z(t)-z_\mathrm{e}\right)=\dot{z}(t)$ est la pente de la courbe représentative de $z(t)-z_\mathrm{e}$ en fonction de *t*.



$\boxed{\text{Les conditions initiales sont } z(0)-z_\mathrm{e}=1\text{ mm et } \dot{z}(0)=0}$

I.2 Étude en régime sinusoïdal forcé

8. J'admets que $\ddot{z}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}+\omega_0^2 z=-\mu\ddot{z}_\mathrm{d}$ et $z_\mathrm{d}(t)=A\cos(\omega t)$

En régime permanent, $z(t)=Z_\mathrm{m}\cos(\omega t+\varphi)$

J'en déduis qu'en notation complexe, $-\omega^2\underline{Z_\mathrm{m}}+\dfrac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{Z_\mathrm{m}}+\omega_0^2\underline{Z_\mathrm{m}}=-\mu\left(-\omega^2 A\right)$

$\Rightarrow \boxed{\underline{Z_\mathrm{m}}=\dfrac{\omega^2\mu A}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}}$

NB : Je reconnais la forme canonique d'un passe haut d'ordre 2 avec $H_0=-\mu A$

9. $Z_m = \left|\underline{Z_m}\right| = \left|\dfrac{\mu\omega^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}\right| \Rightarrow \boxed{Z_m = \dfrac{\mu\omega^2 A}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \omega^2\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}}}}$

10. $\boxed{\text{En BF, } Z_m \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \dfrac{\mu\omega^2 A}{\omega_0^2} \xrightarrow{\omega\to 0} 0 \quad \text{et} \quad \text{en HF, } Z_m \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} \dfrac{\mu\omega^2 A}{\omega^2} = \mu A}$

NB : conforme à un passe haut

11. $Z_m = \dfrac{\mu A}{\sqrt{\left(u^2-1\right)^2 + \dfrac{u^2}{Q^2}}}$ avec $u = \dfrac{\omega_0}{\omega}$ est bien cohérent avec mon résultat Q8.

Il y a résonance si $Z_m(\omega)$ présente un maximum or $u : \omega \mapsto \dfrac{\omega_0}{\omega}$ est monotone donc cela équivaut à $Z_m(u)$ présente un maximum $\Leftrightarrow$ $f : u \mapsto \left(u^2-1\right)^2 + \dfrac{u^2}{Q^2}$ présente un minimum.

$f'(u) = 4u\left(u^2-1\right) + \dfrac{2u}{Q^2} = 4u\left(u^2 - \left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right)\right)$ s'annule pour une valeur autre que $u = 0$ $(\omega \to \infty)$ uniquement si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$. Alors, $f(u)$ présente bien un minimum.

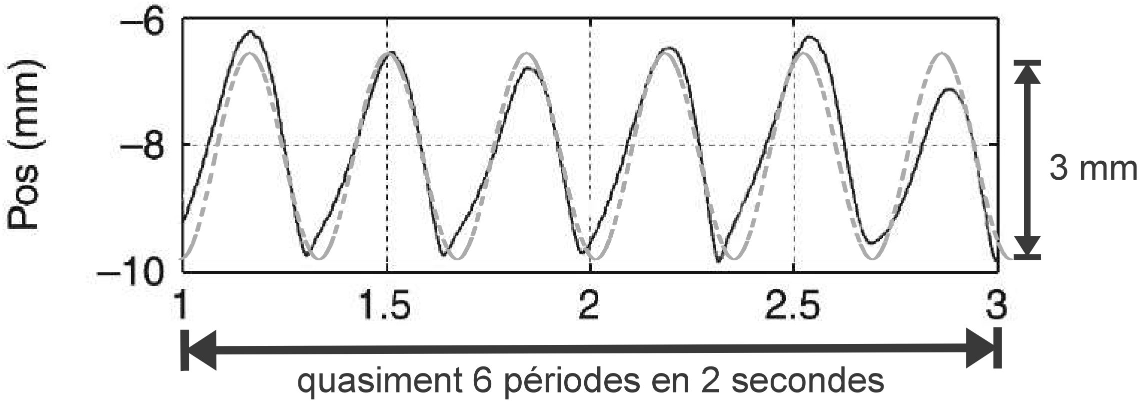
u	0		$\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{résonance} \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Pour le système considéré, $Q = 0{,}11 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$. Il n'y a donc pas résonance.

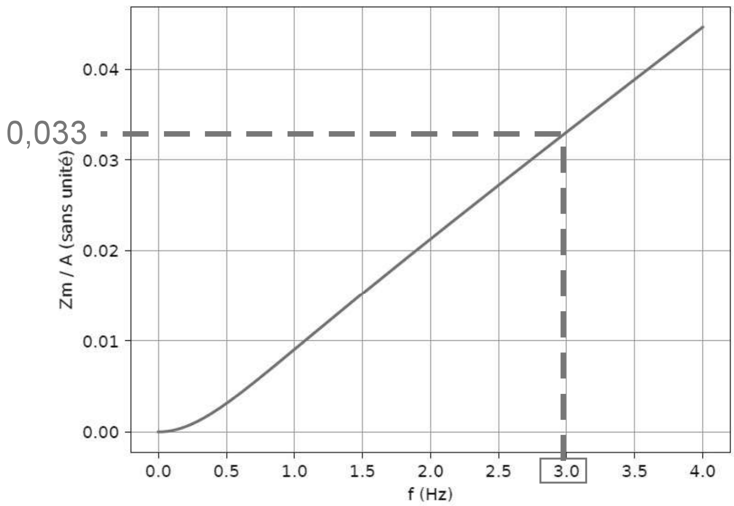
12. Il y a quasiment 3 cycles par secondes $\boxed{f \approx 3\,\text{Hz}}$

La valeur crête à crête est de l'ordre de $Z_{\text{P-P}} \approx 3\ \text{mm}$ d'où $\boxed{Z_m = \dfrac{Z_{\text{P-P}}}{2} \approx 1{,}5\ \text{mm}}$



NB : Le logiciel *Regressi* propose comme modèle approchant $z = -8{,}1 + 1{,}52\cos(2\pi \times 2{,}93 \times t - 2{,}65)$

13. Par lecture graphique, $f \approx 3\ \text{Hz}$, $\dfrac{Z_\text{m}}{A} \approx 0{,}033 \Rightarrow \dfrac{A}{Z_\text{m}} \approx 30$ or $Z_\text{m} \approx 1{,}5\ \text{mm}$ donc $\boxed{A \approx 4{,}5\ \text{cm}}$



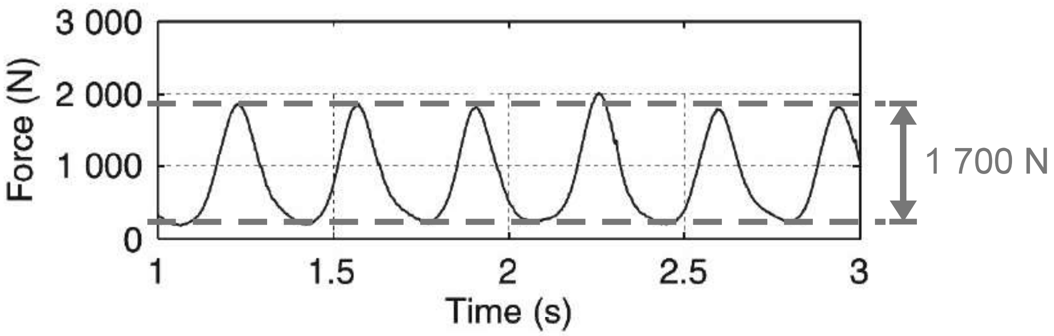
Attention, ce ne sont pas des très basses fréquence ($f = 3\ \text{Hz}$ et $f_0 = 6{,}9\ \text{Hz}$)

Ne pas utiliser l'approximation $Z_\text{m} \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \dfrac{\mu\omega^2 A}{\omega_0^2}$

14. $F = -m_\text{d}\ddot{z}_\text{d}$ a pour amplitude F_m en régime permanent et z_d a pour amplitude A.

$\underline{F_m} = -m_\text{d}\omega^2 \underline{Z_\text{dm}} \Rightarrow \left|\underline{F_m}\right| = \left|-m_\text{d}\omega^2 \underline{Z_\text{dm}}\right| \Rightarrow \boxed{F_m = m_\text{d}\omega^2 A}$

$F_m = 60 \times 4 \times \underbrace{\pi^2}_{\approx 10} \times \underbrace{3^2 \times \frac{9}{2}}_{\approx 40} .10^{-2} = 6 \times 4 \times 40$ $\boxed{F_\text{m} \approx 960\ \text{N}}$



La lecture graphique est de 1 700 N crête à crête soit une amplitude $\boxed{F_\text{m} \approx 850\ \text{N}}$.
L'ordre de grandeur est identique au calcul précédent.