

Préparation 3_concours blanc

Le problème 4 est moins guidé et plus difficile que les autres.

PROBLÈME 1 : Le bleu de la perruche d'après CCINP

Barème sur 50 points

L'extraordinaire diversité des motifs colorés des oiseaux résulte de phénomènes physiques tels que l'absorption de la lumière, la diffusion, les interférences ou encore la diffraction. Certains motifs peuvent être expliqués soit par une répartition organisée du plumage, on parle alors de couleurs structurales, soit par la présence de pigments dans le plumage, on parle alors de couleurs pigmentaires. Si le jaune du canari est par exemple pigmentaire, le bleu de la perruche est lui structural. Certains oiseaux bénéficient des deux types de colorations comme le perroquet Ara qui présente ainsi un plumage très coloré (photo 1).



Photo 1 - Perroquets Ara (rouge vert bleu à gauche, bleu jaune à droite)

Les intervalles de longueurs d'onde de quelques couleurs sont fournis dans le tableau ci-dessous :

Couleurs	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet
λ en nm	620 - 780	590 - 620	580 - 590	500 - 580	450 - 500	380 - 450

On donne, pour une lentille conjuguant un objet A et une image A' , la relation de conjugaison avec origine aux foyers F et F' : $\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -(f')^2$.

À l'origine, la couleur des perruches à l'état sauvage est verte, mais la captivité chez cet oiseau, souvent élevé en nombre, a permis l'émergence de nouvelles couleurs, comme le bleu (photo 2).

C'est notamment l'appauvrissement en pigments jaunes dans son plumage qui est indirectement responsable de cette coloration si particulière et rare dans le domaine animal. De façon schématique, une plume est constituée essentiellement d'un rachis sur lequel pousse les barbes sur lesquelles naissent des barbules (figure 1). Le long des barbules prennent naissance à leur tour des crochets.



Photo 2 - Perruche bleue

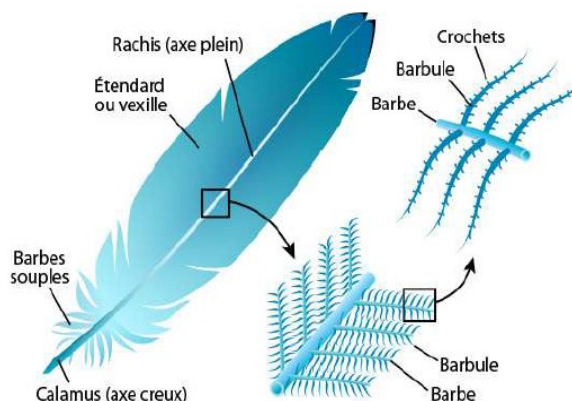


Figure 1 - Constitution d'une plume

Afin de déterminer l'origine physique de cette couleur bleue, on observe une partie AB d'une plume de perruche à l'aide d'un microscope optique.

Pour cela, on dispose :

- d'une première lentille, L_1 (centre O_1 , distance focale $f'_1 = 1,2 \text{ cm}$), qui porte le nom d'objectif ;
- d'une deuxième lentille, L_2 (centre O_2 , distance focale $f'_2 = 2,0 \text{ cm}$), qui porte le nom d'oculaire.

- La distance qui sépare le foyer image F'_1 de l'objectif et le foyer objet F_2 de l'oculaire est appelée intervalle optique, noté Δ , avec ici $\Delta = 16\text{cm}$ (figure 2).

L'observation se fait à l'aide d'un oeil emmétrope (oeil à vision normale) situé derrière l'oculaire.

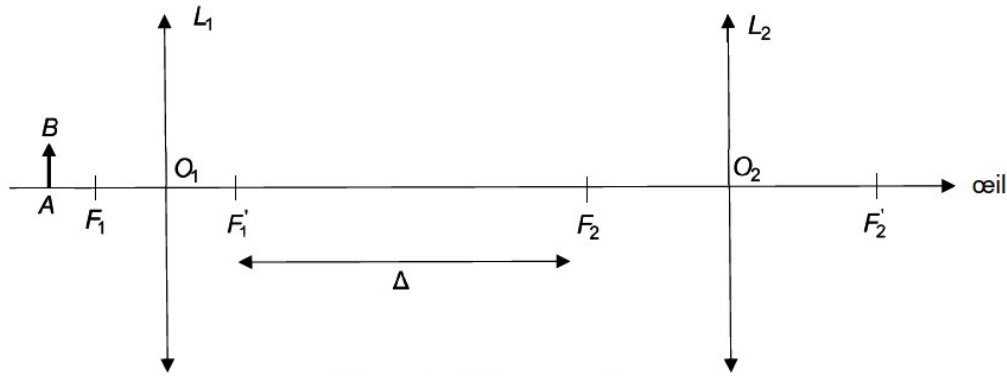


Figure 2 - Schéma du microscope

On se placera pour toute la suite dans les conditions de Gauss et dans l'approximation des petits angles. On note h la taille de l'objet AB observé.

Q1. Afin que l'observation puisse s'effectuer sans fatigue visuelle pour l'oeil emmétrope, où doit être située l'image finale A_2 en sortie de L_2 ? Dans quel plan se situe donc l'image intermédiaire A_1B_1 ?

Q2. Reproduire sur la copie le schéma du microscope et tracer le chemin de deux rayons lumineux passant par l'extrémité B de l'objet, l'un parallèle à l'axe et l'autre passant par O_1 . Faire apparaître sur ce schéma :

- l'image intermédiaire A_1B_1 ;
- le diamètre angulaire α' de l'image finale vue par l'oeil.

Q3. Montrer que la grandeur $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$, appelée grandissement transversal de l'objectif, s'écrit :

$$\gamma_1 = \frac{-\Delta}{f_1'}$$

Q4. En déduire l'expression du diamètre angulaire $\alpha' > 0$ de l'image vue par l'observateur au travers du microscope en fonction de f_1', f_2', h et de Δ .

En l'absence de dispositif, l'oeil voit net un objet situé à une distance comprise entre d_m et d_M , avec $d_m < d_M$.

Q5. Quels noms donne-t-on aux points objets correspondant à ces distances ? Donner une valeur à d_m et d_M pour un oeil emmétrope.

Q6. Déterminer le diamètre angulaire $\alpha > 0$ de l'objet AB vu sans instrument et situé à une distance d_m de l'oeil (**figure 3**).

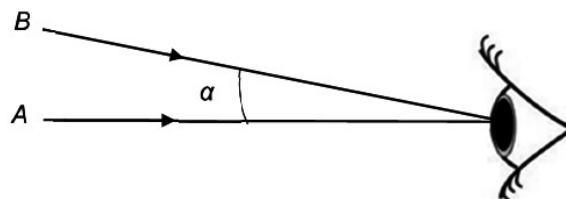


Figure 3 - Diamètre ou distance angulaire

Q7. En déduire que la grandeur $G_C = \frac{\alpha'}{\alpha}$, appelée grossissement commercial du microscope, s'écrit :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f_1' f_2'}$$

Faire l'application numérique avec $d_m = 25\text{cm}$.

Q8. Un oeil peut distinguer deux images ou deux objets si la distance angulaire les séparant est supérieure à la limite de résolution angulaire de l'oeil $\varepsilon = 1'$ (une minute d'arc). Déterminer quelle sera la distance angulaire minimale α_m entre deux objets vus au travers de ce microscope.

L'image d'une partie d'une plume est donnée ci-après (**photo 3**) :

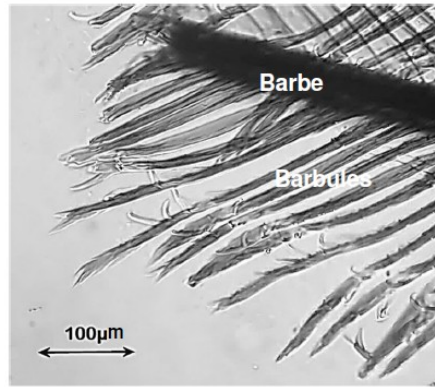


Photo 3 - Image d'une plume de perruche à l'aide d'un dispositif non précisé

Q9. Par mesure sur la photo 3, donner une estimation de la distance entre deux crochets situés au bout des barbules.

Q10. On rappelle que la résolution angulaire de l'oeil nu est $\varepsilon=1'$. Ces crochets peuvent-ils être distingués directement sans instruments ? Pourront-ils être distingués avec le microscope utilisé précédemment ?

En explorant davantage la plume, on découvre qu'à l'intérieur des barbes apparaissent des couches fines parallèles et empilées de petits grains appelés microgranules (figure 4).

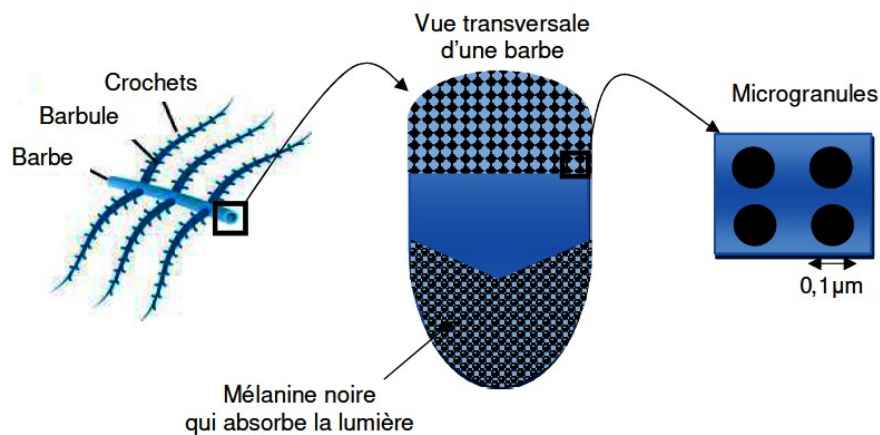


Figure 4 - Coupe transversale d'une barbe

Ces microgranules de petite taille sont responsables d'une diffusion de la lumière incidente (figure 5) :

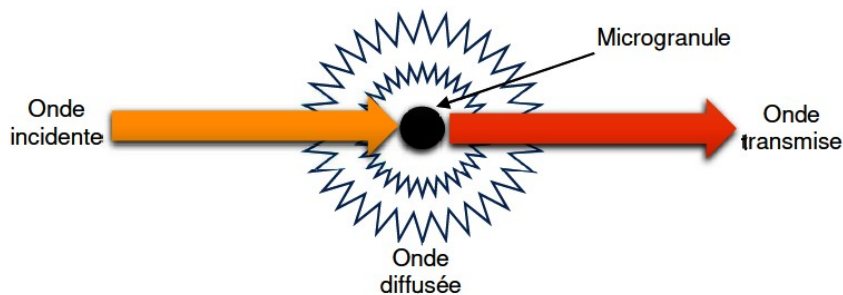


Figure 5 - Diffusion de la lumière par une microgranule

La puissance moyenne diffusée (diffusion de Rayleigh) à travers une sphère, de centre une microgranule, est donnée par la formule : $P = \alpha \omega^4$ avec α une constante de proportionnalité et ω la pulsation du rayonnement incident.

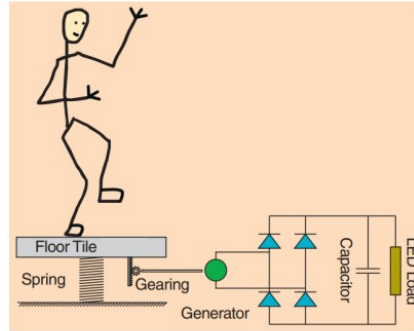
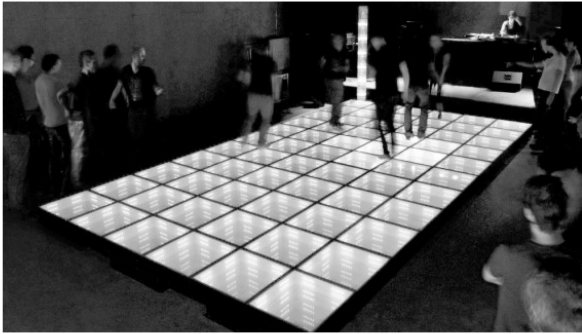
Q11. Expliquer alors la couleur bleue prise par le plumage de la perruche lorsqu'elle est éclairée en lumière blanche. Que deviennent les radiations non diffusées ?

Q12. Par analogie avec un autre domaine de la physique, justifier que le premier étage de la barbe se comporte comme un filtre passe-bas en transmission.

PROBLÈME 2 : Récupération de l'énergie de vibration

Barème sur 60 points

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).

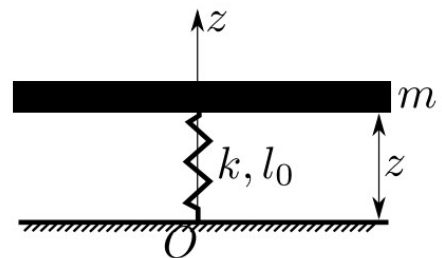


Document 1 : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.
D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI 10.1109/MIAS.2010.939649.

Étude en régime libre

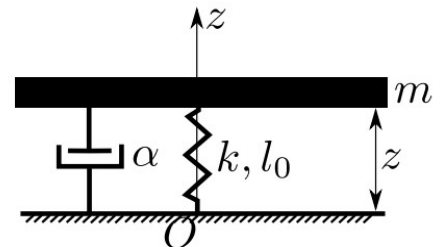
En première approximation, le système est modélisé comme une masse m (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement. C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse. On note k la raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme g est dirigé vers le bas de la figure.



Document 2 : modèle simplifié du système réel.

1. En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre z_{eq} de la masse, en fonction de k , l_0 , m et g .
2. Établir ensuite l'équation différentielle suivie par la variable $z(t)$ lorsque le système est mis en mouvement.
3. Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration. Quelle est la nature du mouvement ?

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3. L'amortisseur exerce sur la masse une force $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ avec \vec{v} le vecteur vitesse de la masse et α une constante positive.



Document 3 : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement.

4. En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable $z(t)$.

5. Mettre l'équation obtenue sous la forme : $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$ (1)

avec ω_0 , Q et z_e des constantes dont on donnera les expressions en fonction de m , k , l_0 , g et α .

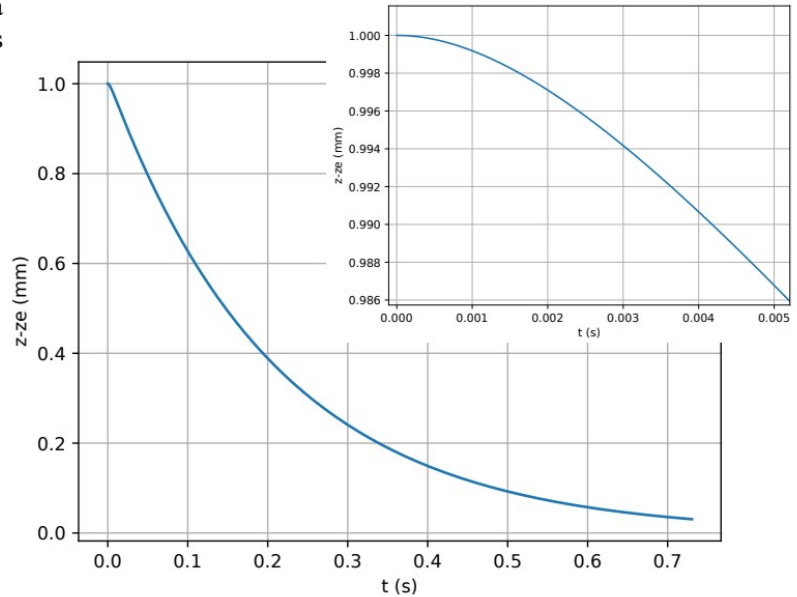
6. Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du second ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité Q qui correspondent à chaque régime.

D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

m	k	α	ω_0	Q	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

7. Le document 4 ci-contre montre le tracé de la solution $z(t) - z_e$. En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



Document 4 : tracé de $z(t) - z_e$ et zoom aux temps courts.

Étude du régime forcé

Dans la pratique, le système est mis en mouvement par le danseur qui, debout sur la dalle, bouge de haut en bas. Il est alors nécessaire d'étudier la réponse du système en régime sinusoïdal forcé.

On prend la hauteur d'équilibre de la dalle comme origine, on a donc désormais $z_e = 0$.

– On note $z_d(t) = A \cos(\omega t)$ la hauteur du centre de masse du danseur (à une constante additive près). Le facteur A est positif.

– On étudie le régime permanent où la position de la dalle, repérée par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $Z_m > 0$.

– On utilise la représentation complexe : $z_d(t)$ est représenté par $\underline{z}_d(t) = A e^{j\omega t}$, et $z(t)$ est représenté par $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\varphi}$. (Avec comme d'habitude j le complexe tel que $j^2 = -1$).

On admet qu'une démarche similaire à celle de la sous-partie précédente mène à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\mu \ddot{z}_d \quad (2)$$

avec les mêmes valeurs numériques que dans le tableau précédent pour ω_0 et Q , et avec μ une constante donnée par $\mu = (\text{masse du danseur})/m \approx 0,7$.

8. À partir de cette équation, établir l'expression de l'amplitude complexe \underline{Z}_m en fonction de ω , ω_0 , Q , μ et A .

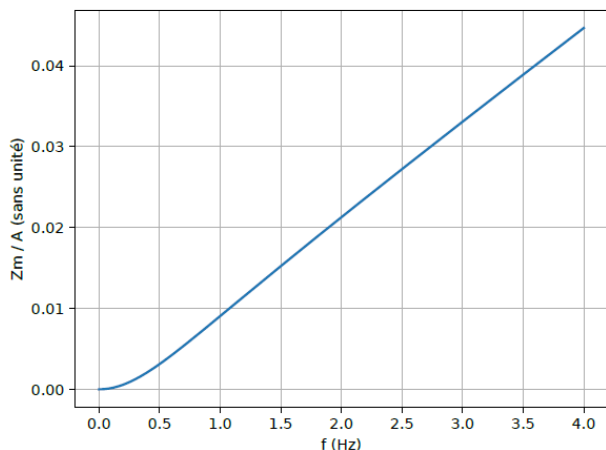
9. En déduire une expression de l'amplitude Z_m en fonction des mêmes paramètres.

10. Donner l'expression de la limite de Z_m à basse fréquence. Faire de même à haute fréquence.

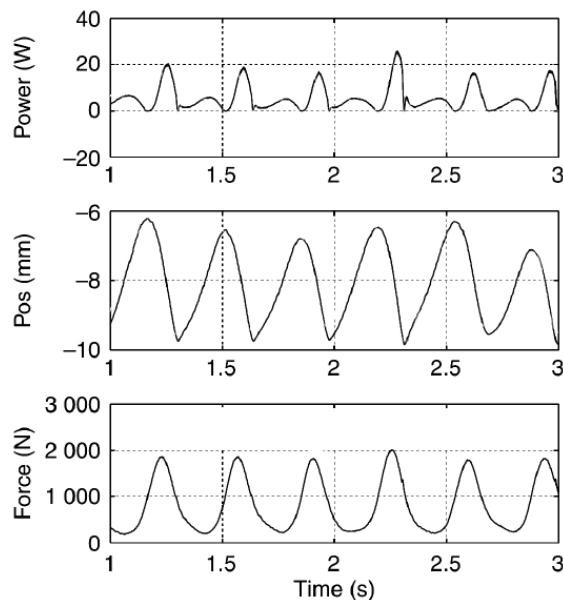
On admet qu'en posant $u = \frac{\omega_0}{\omega}$, on peut écrire $Z_m = \frac{A\mu}{\sqrt{(u^2-1)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$.

11. Montrer qu'il existe un phénomène de résonance à condition que Q vérifie une certaine inégalité qu'on établira. Y a-t-il existence d'une résonance pour le système considéré ici ?

On s'intéresse maintenant à une confrontation entre notre modèle et un enregistrement en situation réelle. En exploitant les documents 5 et 6 (ci-après) :



Document 5 : tracé de Z_m/A en fonction de la fréquence, à basse fréquence, à partir de l'expression établie dans cette sous-partie.



Document 6 : expérience réelle avec un danseur sur la dalle (document fourni par le constructeur). De bas en haut : enregistrement de la force produite par le danseur sur la dalle, de la position $z(t)$ de la dalle par rapport au sol (par rapport à une origine arbitraire) et de la puissance électrique produite en sortie du dispositif.

12. Proposer une estimation de la valeur de la fréquence f d'excitation, ainsi que de la valeur de Z_m à cette fréquence.

13. En déduire une estimation de la valeur de l'amplitude A des mouvements du danseur.

14. D'autre part, sachant que d'après l'équation (2), la force exercée par le danseur sur la dalle s'écrit $F = -(masse\ du\ danseur) \times \ddot{z}_d$, estimez l'amplitude de cette force (la masse du danseur est de 60 kg). Cette amplitude est-elle du même ordre de grandeur que celle mesurée par le constructeur dans le document 6 ?

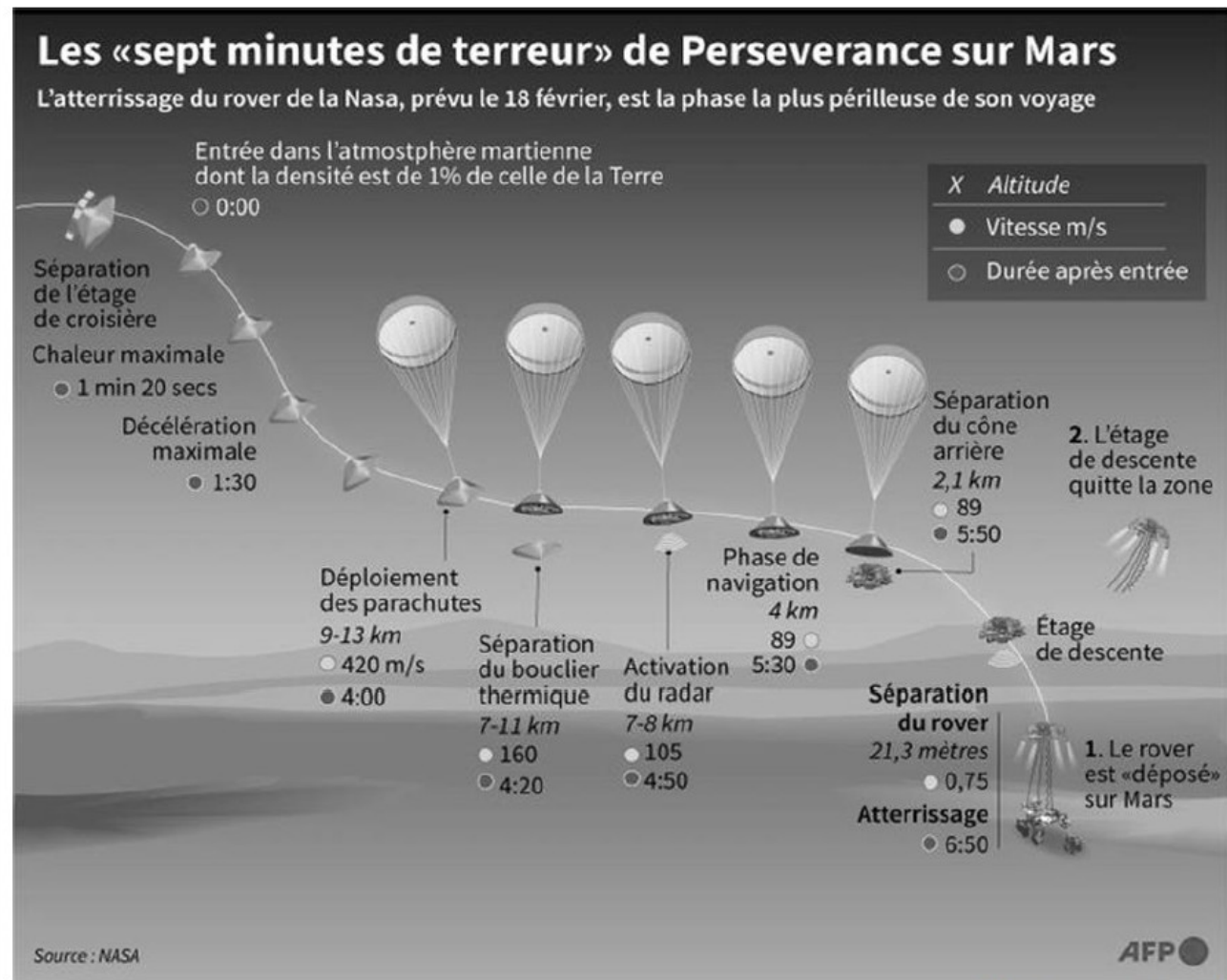
PROBLÈME 3 : L'exploration martienne : Le rover Perseverance d'après CCINP

Barème sur 60 points

Au cours du siècle dernier, de très nombreux auteurs de science-fiction ont écrit autour de l'exploration de la planète Mars et de ce que nous pourrions y découvrir. C'est certainement un jour au cours de ce siècle, que l'homme foulera le sol martien comme Neil Armstrong l'a fait pour la Lune le 21 juillet 1969. Dans l'attente de ce grand jour, ce sont des robots qui nous précèdent.

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et ayant abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de déceler d'éventuelles traces d'une vie passée.

Document 1 - Atterrissage de Perseverance



Source : www.cnes.fr

L'atterrissage

La sonde spatiale Mars 2020, de masse m , pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12\,000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard. Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé à l'altitude d'environ $10,6\text{ km}$ et à la vitesse, notée v_A , de $420\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q1. Le point A étant l'endroit où le parachute est déployé, donner l'expression littérale de l'énergie cinétique $E_c(A)$ de l'ensemble en se limitant à un simple mouvement de translation.

Au bout de 20 secondes, la vitesse n'est plus que de $160\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et l'altitude de $7,5\text{ km}$, Mars 2020 largue alors son bouclier thermique.

Q2. En appelant B le point de largage et en considérant toujours la même masse, exprimer la variation d'énergie cinétique entre les points A et B.

Q3. Connaissant la masse de la sonde spatiale de $3\,000\text{ kg}$, effectuer le calcul de cette variation d'énergie cinétique.

Q4. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Q5. En supposant l'accélération de la pesanteur martienne uniforme et de valeur $g = 3,7\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, calculer la valeur du travail du poids entre les points A et B, noté $W_{AB}(\vec{P})$.

Q6. Ce travail est-il qualifié de moteur ou de résistant ? Justifier.

Q7. Déterminer, à partir des questions **Q4** et **Q5**, le travail des forces de frottement noté $W_{AB}(\vec{f})$ sur le parachute, dont la résultante sera notée \vec{f} .

Q8. Dans la suite du sujet, nous nous limiterons à une étude du mouvement en translation verticale. En supposant cette force de frottement \vec{f} constante, déduire un ordre de grandeur de sa valeur minimale à partir de la question précédente.

En réalité, la résultante des forces de frottement n'est pas constante et dépend de la vitesse du système. Nous considérerons une force de type frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est le coefficient de frottement fluide et \vec{v} est le vecteur vitesse.

Q9. Soit l'axe (Oz), vertical et orienté vers le bas, dont l'origine O se situe au point d'ouverture du parachute. Faites un schéma sur lequel figurent la sonde spatiale matérialisée par son centre de gravité G à une altitude quelconque après ouverture du parachute, l'axe (Oz) et les deux forces s'exerçant sur la sonde.

Q10. La descente de la sonde peut-elle être qualifiée de chute libre ? Justifier.

Q11. À partir de la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle vérifiée par la projection de la vitesse \vec{v} de la sonde sur l'axe vertical et la mettre sous la forme : $\frac{dv}{dt} + Av = B$, où A et B représentent deux constantes dont on précisera les expressions.

Q12. Sans résoudre l'équation, déduire de la question précédente l'expression de la vitesse limite théorique pouvant être atteinte par la sonde avec cette hypothèse, au bout d'un temps infiniment long.

Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le skycrane) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde. La bande Ka (Kurz Above) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales ; on considère une fréquence moyenne de 30 GHz .

Q13. Calculer la longueur d'onde dans le vide, notée λ_0 , associée à cette fréquence.

Lorsque la sonde se trouve à une altitude H, celle-ci peut être déterminée avec précision grâce à la durée mise par l'onde pour effectuer un aller-retour entre l'antenne d'émission et le sol.

Q14. Exprimer l'altitude H de la sonde en fonction de la durée mise par l'onde pour effectuer cet aller-retour.

Q15. À partir de l'infographie du CNES (document 1), estimer le temps Δt écoulé entre l'émission de l'onde par le radar de la sonde et sa réception après réflexion sur le sol martien, au moment de la séparation du bouclier thermique.

La communication

Les rovers peuvent communiquer directement avec la Terre via deux antennes à 8 GHz mais aussi avec les sondes orbitales, appelées orbiters et situées à 400 km en orbite autour de Mars. Ces sondes orbitales transmettent les données reçues à la Terre lorsque celle-ci est dans le champ de leur antenne. Ainsi, les rovers économisent de l'énergie. Bien que la technologie ait évolué considérablement dans ce domaine, historiquement, l'émission et la réception d'ondes ont été possibles grâce à l'association de simples dipôles passifs. Avant transmission des signaux, il est nécessaire d'étudier l'alimentation de l'antenne émettrice. Même si les circuits utilisés dans la réalité sont plus élaborés, historiquement, on a pu obtenir un

courant oscillant grâce à un circuit comprenant une bobine et un condensateur. La tension aux bornes de ce dernier pourra alimenter une antenne émettrice. C'est dans ce contexte que nous étudierons ces dipôles.

On considère ici un circuit RLC schématisé en figure 1. Le condensateur est initialement déchargé et le circuit est alimenté par une source de tension continue notée E .

On considérera les valeurs suivantes : $R = 2,0 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$ et $L = 40 \text{ mH}$.

À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

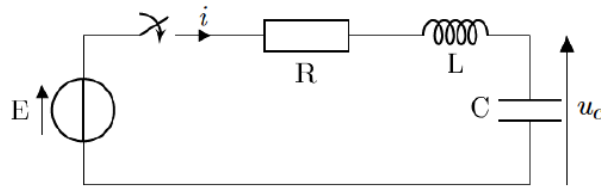


Figure 1 - Circuit RLC alimenté par une tension continue

Q16. Déterminer la tension aux bornes du condensateur $u_c(0^+)$ et l'intensité dans le circuit $i(0^+)$ juste après la fermeture de l'interrupteur. Justifier.

Q17. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_c(t)$, la mettre sous la forme canonique : $\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E$, en déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q .

Q18. Déterminer la valeur de la fréquence propre f_0 ainsi que du facteur de qualité Q . Préciser le régime d'oscillation.

On remplace la source de tension continue par une source de tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ où ω désigne la pulsation.

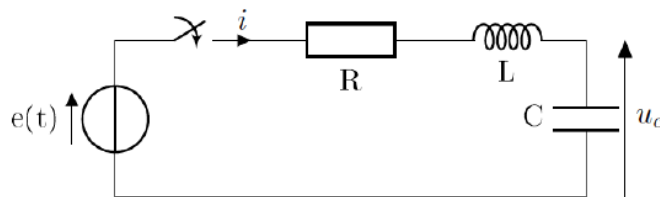


Figure 2 - Circuit RLC alimenté par une tension variable

Q19. Sachant que l'impédance équivalente à une association en série des dipôles R et L est donnée par : $Z = R + jL\omega$, déterminer l'expression de l'impédance équivalente Z_{eq} à l'association en série des trois dipôles R , L et C .

Q20. Sachant que l'intensité dans le circuit s'écrit $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$ où φ désigne la phase à l'origine, donner l'écriture de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du générateur $e(t)$ et de l'intensité dans le circuit $i(t)$.

Q21. Déterminer, grâce aux questions précédentes, l'expression de l'amplitude de l'intensité I en fonction de E , R , L , C et ω .

Q22. En déduire l'expression de la fréquence d'oscillation f_r pour laquelle l'amplitude de l'intensité I qui alimente l'antenne sera maximale. Donner alors l'expression de cette intensité maximale I_{max} en fonction de E et de R .

Dans les questions suivantes, nous allons étudier la transmission d'information directe entre le rover sur Mars et la Terre.

Q23 Mars s'éloigne de la Terre à la distance maximale d'environ 300 millions de km. Estimer la durée τ nécessaire à un signal radio pour parcourir cette distance. Conclure.

Nous pouvons nous demander pourquoi ne pas avoir installé de caméra HD sur le rover. Une image 4K de taille 4096×2160 pixels est codée sur 32 bits par pixel et le débit moyen utilisé pour la transmission est de $0,25 \text{ Moctet}\cdot\text{s}^{-1}$.

Q24. Calculer le poids d'une image 4K en Mo (on prendra $1 \text{ Mo} = 10^6 \text{ octets}$).

Q25. Calculer la durée nécessaire pour obtenir une vidéo de 1 seconde avec une cadence de 24 images par seconde envoyée depuis Mars vers la Terre. Commenter.

PROBLÈME 4 : Améliorations des performances en cyclisme : du casque classique vers le casque profilé en goutte d'eau d'après concours centrale-supélec

Barème sur 80 points

Dans le cyclisme de haut niveau, les gains aérodynamiques font bien souvent la différence, en particulier en contre-la-montre où les vitesses de déplacement sont les plus élevées. À ces vitesses, 90% de la puissance développée est utilisée pour lutter contre l'effort de traînée aérodynamique. Parmi les facteurs influant sur cette traînée, le casque représente de l'ordre de 2 à 8% de la traînée totale, en fonction de la géométrie de celui-ci. L'utilisation d'un casque performant joue donc un rôle important dans l'amélioration des performances.

Le 23 juillet 1989, Greg Lemond remporte le Tour de France devant Laurent Fignon avec 8 secondes d'avance au terme des 3285 km de l'épreuve. L'ultime étape, décisive, est un contre-la-montre lors duquel Greg Lemond prend l'avantage sur Laurent Fignon en lui reprenant 58 secondes sur les 24,5 km du parcours, effectués à près de $55 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ de vitesse moyenne. Au-delà des considérations physiologiques des deux cyclistes, Lemond utilisa de nombreux éléments novateurs en ce qui concerne l'aérodynamisme. En particulier, il était muni d'un casque profilé, révolutionnaire pour l'époque. Fignon, de son côté, ne portait pas de casque.



Figure 1 Greg Lemond (à gauche) et Laurent Fignon (à droite) lors du dernier contre-la-montre du Tour 1989

L'objectif de ce problème est de quantifier le gain de puissance que procure ce type de casque par rapport à un casque dit « classique ».



Figure 2 Casque de vélo traditionnel (à gauche), en goutte d'eau (au centre) et à flux d'air (à droite)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines formules et données utiles ainsi que les définitions de quelques fonctions Python sont regroupées en fin d'énoncé.

Afin de quantifier l'apport d'un casque profilé par rapport à un casque traditionnel, on étudie une phase de descente en roue libre (c'est-à-dire sans pédalage) sur route rectiligne, de pente constante. La figure 3 précise le système de coordonnées utilisé.

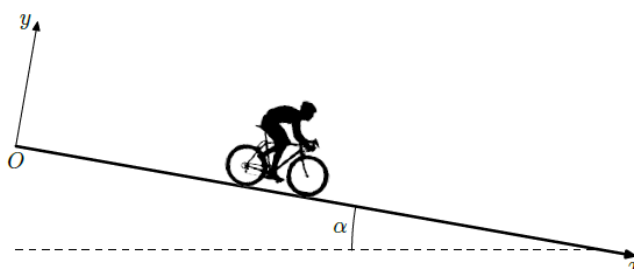


Figure 3 Représentation schématique du système étudié

Pour toute cette partie, on considérera le système {cycliste + vélo}, assimilé à un point matériel M . On supposera ce système soumis aux seules actions extérieures suivantes :

- l'action de la pesanteur, notée \vec{P} ;
- l'action de la route sur les roues, notée \vec{R} incluant :
 - la réaction normale, notée \vec{N} ,
 - la résistance au roulement, notée \vec{F}_r et supposée telle que $\vec{F}_r = -\mu_r N \vec{e}_x$ où N est la norme de la réaction normale et μ_r le coefficient de résistance au roulement ;
- l'action de l'air sur le système.

On note m la masse du système, \vec{v} la vitesse du système dans le référentiel terrestre, \vec{g} l'accélération de la pesanteur, α l'angle entre la direction horizontale et la direction de la route.

I. Étude de la phase de démarrage

Avant d'envisager une étude en régime permanent, il est nécessaire de caractériser la phase de démarrage pour déterminer la distance que parcourt le cycliste avant d'atteindre sa vitesse limite. On supposera que le cycliste est initialement à la position $x=0$ à l'instant $t=0$ et se lance dans la pente sans vitesse initiale.

On modélise l'action de l'air sur le système {cycliste + vélo} par une force de traînée de la forme

$$\vec{F}_r = -\frac{1}{2} \rho S C_x v \vec{v}$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S la surface frontale projetée sur le plan perpendiculaire à l'écoulement, C_x le coefficient de traînée aérodynamique du système {cycliste + vélo} et v , la norme de \vec{v} sa vitesse par rapport à la route.

Dans cette partie I, on prendra pour les applications numériques $S C_x = 0,30 \text{ m}^2$ et $\alpha = 0,10 \text{ rad}$ (descente sur une pente de 10%).

Q 1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v , la norme de la vitesse du système {cycliste + vélo}. On l'écrira sous la forme suivante, en précisant les expressions littérales et les valeurs numériques des paramètres a et b ,

$$\frac{dv(t)}{dt} + a v^2(t) = b. \quad (\text{I.1})$$

Q 2. En utilisant l'équation différentielle précédemment établie, déterminer la norme de la vitesse limite atteinte en régime permanent, que l'on écrira sous la forme $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{K}{S C_x}}$ (I.2)

où K est une constante que l'on déterminera en fonction de m , g , ρ , α et μ_r .

Q 3. Calculer la valeur numérique de v_{lim} . Commenter.

La figure 4 propose un programme Python pour résoudre numériquement l'équation (I.1).

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def r(f, v, t):
4     V = [v]
5     for i in range(len(t) - 1):
6         V.append(V[i] + (t[i+1] - t[i]) * f(V[i]))
7     return V
8 def g(u):
9     return 0.92 - 2.3e-3 * u * u
10 x = np.linspace(0, 120, 1000)
11 y = r(g, 0, x)
12 plt.plot(x, y)
13 plt.show()
```

Figure 4 Résolution numérique de l'équation (I.1)

Q 4. En explicitant les lignes concernées du programme de la figure 4, expliquer son principe. Quelle méthode de résolution utilise-t-il ?

Le programme de la figure 4 est exécuté avec plusieurs versions de la ligne 10. Les courbes obtenues sont données figure 5.

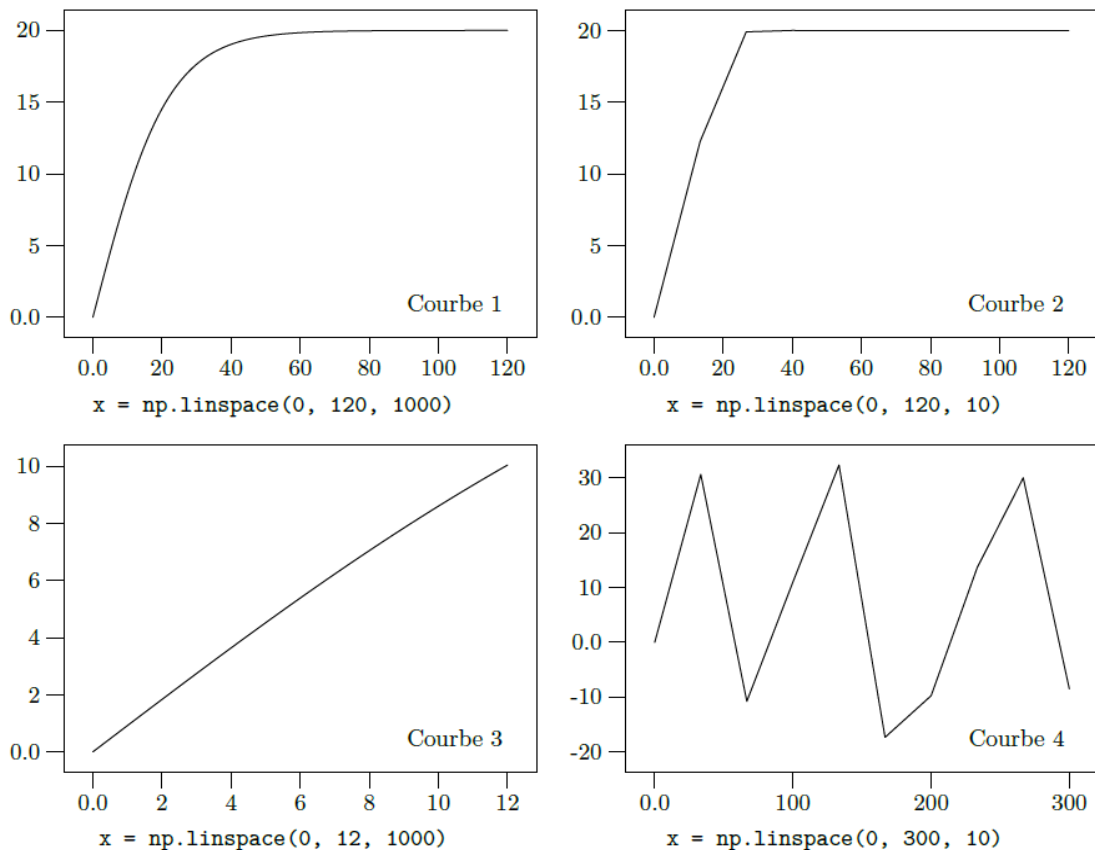


Figure 5

Q 5. Expliciter la signification physique des valeurs figurant dans la ligne 10 et commenter l’allure de ces courbes au regard des valeurs utilisées.

On souhaite déterminer la distance L_{RP} parcourue avant d’atteindre le régime permanent.

Q 6. À partir des courbes proposées sur la figure 5 et en détaillant la démarche suivie, estimer un ordre de grandeur de cette distance.

Q 7. Écrire une fonction Python permettant d’accéder à cette valeur à partir des données numériques issues de ces courbes.

II) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

L’objectif est ici de déterminer le gain de puissance que procure un casque profilé par rapport à un casque classique. Pour ce faire, le cycliste est muni d’un capteur GPS permettant de repérer sa position au cours du temps. Différents essais sont réalisés dans la descente de Laffrey en Isère. Cette descente présente l’avantage d’être rectiligne et de pente quasiment constante sur 6,5 km.

On suppose dans cette section que la distance L_{RP} calculée précédemment a été parcourue et que le régime permanent est atteint. Pour cela, on limite l’étude à un sous-segment, de longueur $L' = 5,00 \text{ km}$ et de pente constante 10% en descente (donc d’angle $\alpha = 0,10 \text{ rad}$), rectiligne. Diverses applications gratuites disponibles sur internet permettent d’accéder au temps mis par le cycliste pour parcourir ce tronçon. On modélise l’action de l’air sur le système par la force de traînée aérodynamique.

Nous avons vu précédemment l’effet du SC_x sur la vitesse du cycliste. Différents paramètres impactent la valeur de ce SC_x . Afin de quantifier l’effet du casque uniquement, nous considérons dans cette partie le même cycliste, muni du même vélo, des mêmes vêtements et dans la même position. Seul le choix du casque diffère. On note alors $SC_{x,c}$ le SC_x du système {cycliste + vélo} lorsque le cycliste est muni d’un casque classique et $SC_{x,p}$ ce SC_x lorsque le cycliste est muni d’un casque profilé. On note respectivement $v_{lim,c}$ et $v_{lim,p}$ les vitesses en régime permanent sur le tronçon considéré.

Le protocole expérimental mis en œuvre est le suivant : le cycliste parcourt ce tronçon, de longueur L' , 10 fois muni d’un casque de vélo classique, puis 10 fois muni d’un casque de contre-la-montre profilé. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1 ci-après.

Numéro de l'essai	Temps de parcours casque classique (en s)	Temps de parcours casque profilé (en s)
1	270	258
2	267	261
3	269	259
4	272	262
5	271	260
6	269	260
7	268	259
8	272	258
9	270	263
10	271	258

Tableau 1 Mesures expérimentales des temps de parcours dans la descente de Laffrey avec casques classique et profilé
Deux sources d'incertitudes sont ici présentes :

- celle de précision de la mesure temporelle, résultant du défaut de précision de la localisation par le GPS.
- celle de répétabilité du protocole, que nous allons quantifier ici.

Q 9. Déterminer la vitesse moyenne $\langle v_c \rangle$ et l'incertitude-type de type A $u(\langle v_c \rangle)$ sur cette moyenne dans le cas du casque classique.

Le même calcul avec le casque profilé donne $\langle v_p \rangle = 19,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $u(\langle v_p \rangle) = 0,041 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Grâce aux mesures ci-dessus on établit :

	Configuration avec casque classique	Configuration avec casque profilé
$SC_x(\text{m}^2)$	0,3051	0,2937
incertitude-type (m^2)	0,0036	0,0037

Tableau 2 Valeurs de SC_x et incertitude-type associées

Q 12. Exprimer les différentes puissances s'appliquant sur le système {cycliste + vélo} en fonction de m , v , g , ρ , α et μ_r et SC_x .

Q 13. En utilisant le tableau 2, évaluer numériquement le gain en puissance procuré par le casque profilé à $v_{\text{lim}} = 54,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, vitesse moyenne de Greg Lemond lors du contre-la-montre final du Tour 1989. Déterminer également une incertitude-type sur ce résultat. Commenter.

Annexe relative au problème 4

Évaluation des incertitudes

Évaluation de type A :

Si l'on dispose de N mesures y_i d'une grandeur y , alors

Valeur moyenne	Incertitude-type sur une mesure	Incertitude-type sur la moyenne
$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$	$u(y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$	$u(\langle y \rangle) = \frac{u(y)}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$

Opérations et fonctions Python

On suppose avoir exécuté l'instruction

```
import numpy as np
```

Fonctions

- `range(n:int)` renvoie la séquence des n premiers entiers ($0 \rightarrow n-1$)
`list(range(5))` \rightarrow `[0, 1, 2, 3, 4]`.

Opérations sur les listes

- `len(u)` donne le nombre d'éléments de la liste `u` ;
`len([1, 2, 3])` \rightarrow `3`, `len([[1, 2], [3, 4]])` \rightarrow `2`.
- `u.append(e)` ajoute l'élément `e` à la fin de la liste `u` (identique à `u[len(u):] = [e]`).

Opérations sur les tableaux

- `a.ndim` nombre de dimensions du tableau `a`.
- `a.shape` tuple donnant la taille du tableau `a` pour chacune de ses dimensions.
- `len(a)` taille du tableau `a` dans sa première (ou seule) dimension (identique à `a.shape[0]`).
- `np.linspace(start, stop, num=50)` crée un vecteur contenant `num` valeurs équiréparties dans l'intervalle `[start, stop]` ;
`np.linspace(1, 10, 4)` \rightarrow `array([1., 4., 7., 10.]`.
- `np.arange(start, stop, step)` crée un vecteur contenant des valeurs régulièrement espacées de `step` dans l'intervalle `[start, stop[` ;
`np.arange(1, 2, 0.2)` \rightarrow `array([1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8])`.
- `np.mean(a)`, `np.std(a)` calcule respectivement la moyenne et l'écart-type des éléments du tableau `a`.
- `np.sqrt(a)` crée un tableau de même forme que `a` dont les éléments sont les racines carrées des éléments de `a`.