PSI **Janvier 2023**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Probabilités-Variables Aléatoires- Loi d'une v.a

Exercice 1. Extraît CCINP 21
On définit , pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$ avec $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Montrer que la suite $(p_k)_k$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. On sait que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{9}$. Calculer $\mathbb{P}_B(A), \mathbb{P}_B(\overline{A}), \mathbb{P}_B(A \cap \overline{B})$

Exercice 3. Émile est un excellent footballeur . La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est 2/3. Paulin est moins fort .La probabilité qu'il marque un but lorsqu'il tire un pénalty est 1/2. Émile lance un défi à Paulin : chacun va tirer un pénalty à son tour en commençant par Paulin. Le premier qui marque à gagné. Quelle est la probabilité qu'Émile gagne ?

Exercice 4. On lance $2n+1$ fois une pièce équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de « pile »que de « face »lors de ces lancers ?
2. Pour $k \in [\![0; 2n+1]\!]$, rappeler la probabilité d'obtenir k fois « pile ».
3. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$

Exercice 5. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir deux fois 6 (pas nécessairement consécutivement). On appelle X le nombre de lancers nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 6. (CCINP PSI 2021)
Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note X le chiffre du dernier lancer.

1. Soit N le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de N .
2. Pour tous $(k, n) \in [\![1, 6]\!] \times \mathbb{N}^*$, calculer $P(X = k, N = n)$.
3. Calculer $P(X = k)$. En déduire la loi de X .
4. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et sans connaître son numéro, on en tire un nombre n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche sachant que, au cours des n premiers tirages, seules les boules blanches ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 8. On dispose d'une urne contenant 1 boule blanche et une boule noire . On effectue $n \in [\![1, +\infty[\![$ tirages successifs dans cette urne en suivant le protocole suivant : les tirages sont successifs et avec remise de la boule tirée ainsi qu'une autre boule de l'autre couleur. Notons pour $k \in [\![1, n]\!]$
N_k : la boule tirée au k ième tirage est noire.
A_k : la première boule noire est obtenue au k ième tirage.
A_0 : aucune boule noire n'est tirée lors des n tirages.

1. Calculer $P(N_1)$.
2. Les évènements de la famille $(N_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Calculer $P(N_2)$ et $P_{N_2}(N_1)$.
4. Calculer $P(A_k)$ et $P(A_0)$.
5. En déduire, que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Exercice 9. : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2.
3. Trouver une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
4. Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 10. Soient X, Y 2 v.a indépendantes suivent une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

1. En développant de 2 façons différentes $(1+X)^{2n}$, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.
2. Calculer la probabilité que $X = Y$.
3. Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 11. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = X^2 + 1$.

1. Calculer $P(2X < Y)$
2. Calculer la probabilité que X soit pair ; y-a-t-il plus de chances que X soit impair ?

Exercice 12. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p (p \in]0,1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Exercice 13. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Expliciter les lois marginales de U et de V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Soit X et Y deux v.a indépendantes de loi géométrique p. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leq S$ les deux valeurs propres de M.

1. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.
3. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?