Problèmes cherchés en classe

Problème 1: La mission spatiale Rosetta

Ce sujet propose de revenir sur l'exploit réalisé par l'Agence Spatiale Européenne lors de l'accomplissement de la mission Rosetta. Cette mission consistait à rejoindre la comète 67P Churyomov – Gerasimenko (rebaptisée Churry à cette occasion) sur son orbite à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre.

Une fois sur place la sonde devait étudier l'environnement de Churry en se satellisant autour d'elle. Une fois ce premier exploit réalisé le 6 août 2014, la sonde Rosetta devait envoyer un robot, nommé Philæ, pour qu'il se pose sur la comète et réalise une étude in situ. Ce robot a réussi à se poser sur la comète le 12 novembre 2014, il a ensuite réalisé sa mission de façon quasi-nominale pendant 3 jours dans des conditions physiques extrêmes.

Il a ensuite transmis les données recueillies vers Rosetta toujours en orbite autour de Churry. Rosetta les a ensuite envoyées vers la Terre où nous les avons reçues quelques dizaines de minutes plus tard.

La réalisation complète de cette mission aurait pu être présentée comme un exploit retentissant de la conquête spatiale, n'ayant rien à envier aux premiers pas de l'homme sur la Lune. Cependant, le fait que Philæ se soit posée de façon peu stable, le traitement médiatique de ce genre d'événement, et bien d'autres facteurs plus complexes, n'ont pas permis de se rendre compte de l'incroyable performance scientifique réalisée à l'occasion de cette mission.

Ce sujet étudie des propriétés orbitales de Churry. Les résultats numériques des calculs seront donnés avec deux chiffres significatifs. Les valeurs numériques utiles sont rassemblées en fin d'énoncé. Une quantité surmontée d'un point désigne la dérivée temporelle de cette quantité : $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$.

La comète étudiée s'appelle Churyomov – Gerasimenko, du nom des scientifiques ukrainiens M. Churyumov, l'utilisateur du télescope, et Mme Gerasimenko, la comparatrice d'images, qui l'ont co-découverte en 1969. Cette comète mesure entre 3 et 5 km de diamètre et tourne sur elle-même en une douzaine d'heures. Voilà à peu près tout ce que l'on savait sur la comète objet de Rosetta et Philae. Les estimations sur sa masse, varient, quant à elles, d'un facteur 10 et sa forme exacte restera un mystère jusqu'en juillet 2014 date de la première photo envoyée par Rosetta. Le noyau de la comète n'a pu être observé que depuis la Terre (le Very Large Telescope au Chili en lumière visible ou proche infrarouge) ou les satellites tournant autour de la Terre (Hubble en lumière visible, Spitzer en moyen infrarouge). De ces observations ont été tirées des courbes de lumière qui, elles-mêmes, ont permis de déterminer quelques unes de ses caractéristiques.

1. Une comète assimilée à un point matériel M de masse m est en orbite circulaire de rayon R autour du Soleil. En appliquant le principe fondamental de la mécanique établir l'expression de sa vitesse v en fonction de R, M_s et G. Retrouver ensuite la 3ème loi de Kepler.

2. La comète Churry a une trajectoire elliptique caractérisée par son demi-grand axe a et son exentricité e. Le soleil constitue l'un des foyers de l'ellipse.

Utiliser la figure 1 pour déterminer le périhélie r_{min} et l'aphélie r_{max} en fonction de a et e. Donner l'expression de $r_{min}+r_{max}$ en fonction de a *puis* $r_{max}-r_{min}$ en fonction de a et e.

Calculer a et e en unité SI.

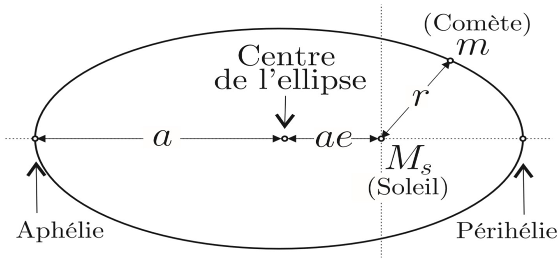


figure 1

3. Dans le cas d'une orbite elliptique, on peut démontrer que la 3ème loi de Képler obtenue pour une trajectoire circulaire se généralise en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a de l'ellipse .

En déduire la relation entre le demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la comète, la période T de la comète, la masse du Soleil M_s et la constante de gravitation G. Calculer la période T_c en années de la comète Churry.

4. On ne suppose plus la trajectoire circulaire, et on note $\vec{r}$ le vecteur position de la comète dans le référentiel héliocentrique et $r=\|\vec{r}\|$. Donner l'expression du moment cinétique $\vec{L_O}$ de la comète par rapport au Soleil. Montrer que la trajectoire de la comète est contenue dans un plan que l'on précisera. Déterminer l'expression de $C=\frac{\|\vec{L_O}\|}{m}$ en fonction des coordonnées polaires *(r,θ)* de la comète dans ce plan.

5. Établir la relation $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = E_m - E_{eff}(r)$ où E_m est l'énergie mécanique supposée négative de la comète et $E_{eff}(r)$ son énergie potentielle effective que l'on exprimera en fonction de C, G, m, M_s et r. Tracer la représentation graphique de $E_{eff}(r)$, et positionner sur ce graphique E_m, r_{max} et r_{min} .

6. Montrer qu'il existe une trajectoire circulaire correspondant à $r = r_{min} = r_{max} = r_0$ et $E_m = E_0$. Déterminer l'expression de r_0 en fonction de C, G et M_s puis en déduire celle de E_0 en fonction de C, G, M_s et m. On note respectivement $E_c(r)$ et $E_p(r)$ les énergies cinétique et potentielle de la comète à la distance r du Soleil, déterminer la relation entre $E_c(r_0)$ et $E_p(r_0)$.

7. Que vaut $\dot{r}$ en r_{min} et r_{max} ? En déduire l'équation du second degré en r dont r_{min} et r_{max} sont solutions, qui permet de déduire l'expression de E_m en fonction de G, m, M_s et a.

Après avoir montré que son discriminant est bien positif, résoudre l'équation et exprimer E_m en fonction de G, m, M_s et a .

Puis montrer que $\boldsymbol{e^2 - 1 = \frac{m C^2}{2 a^2 E_m}}$.

8. Quelle est la propriété de la vitesse aréolaire de la comète, rapport de la surface balayée par le rayon vecteur de la comète sur le temps mis pour la parcourir ? Quel est l'astronome qui a identifié cette propriété qui porte son nom ?

Établir l'expression de la vitesse aréolaire en fonction de la constante des aires C.

Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est $S = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, déterminer la relation entre la période de la comète T et le demi-grand axe a de l'ellipse. Commenter le résultat obtenu.

Rosetta a bénéficié de 4 assistances gravitationnelles afin d'acquérir l'énergie nécessaire pour rejoindre la comète sur son orbite. La précision requise pour l'accomplissement de cet exploit est absolument insensée : fenêtre de quelques kilomètres entre des objets sur des orbites gravitationnelles à des vitesses de l'ordre du kilomètre par seconde, à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Peu de gens ont pris conscience de l'exploit réalisé par les ingénieurs de l'Agence Spatiale Européenne.

9. Qu'entend-on par assistance gravitationnelle?

Données numériques:

- Constante de gravitation : $G = 6{,}7 . 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$; Masse du soleil : $M_s = 2{,}0 . 10^{30} kg$
- Unité astronomique : $1 ua = 1{,}5 . 10^{11} m$

Caractéristiques de la comète Churry :

- $r_{max} = 5{,}7\, ua$: aphélie, distance au plus loin du soleil
- $r_{min} = 1{,}30\, ua$:périhélie, distance au plus proche du soleil

Problème 2: Mélange de gaz parfaits

Soient deux ballons B_1 et B_2 à la température de 0°C.

B_1 , de volume V_1 = 3,0L , contient du dioxyde de carbone sous la pression P_1 = 4,04 bar.

B_2 , de volume V_2 = 1,0L , contient du dioxygène sous la pression P_2 = 6,06 bar.

1) Dans tout l'exercice, les deux gaz seront considérés comme parfaits. Expliquer ce propos.

. On relie B_1 et B_2 par un tube très fin.

2) L'équilibre étant établi, la température étant toujours 0°C , calculer les pressions partielles de dioxyde de carbone et de dioxygène dans le mélange.

3) Quelle est la pression totale et quelle est la masse volumique μ du mélange ?

4) On porte la température de l'ensemble de 0°C à 15°C . La dilatation des ballons étant négligeable, que deviennent la pression totale et la masse volumique du mélange ?

Données : M (CO_2) = 44g.mol^{-1}; M(O_2) = 32g.mol^{-1}. R = 8,314 J.K^{-1}. Mol^{-1} ; T(K) = θ°C.

<u>Problème 3 :</u> Fonctionnement d'une machine nespresso

Document

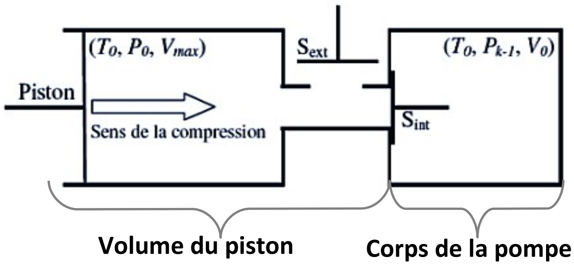
Dans une machine à café expresso, on fait circuler l'eau chaude à travers la poudre de café en jouant sur une différence de pression . La plupart des machines à café de ce type réalisent des pressions de 15 bars. On s'intéresse ici au principe d'une pompe à air permettant de comprimer l'air ambiant. La pompe est constituée de deux compartiments, le corps de la pompe de volume fixe V_0 dans lequel est stocké l'air sous pression et un piston qui, à chaque aller-retour, pousse de l'air issu de l'atmosphère extérieure dans le corps. ***Le volume du piston varie de V_{min} à V_{max}.***

Toutes les transformations sont réalisées à température constante $\theta_0 = 20°C$, et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$ dont la pression dans l'atmosphère est de $P_0 = 10^5\ Pa$.

On peut décomposer en quatre étapes, le fonctionnement de la pompe pour passer de la pression p_{k-1} à la pression p_k dans le corps de la pompe :

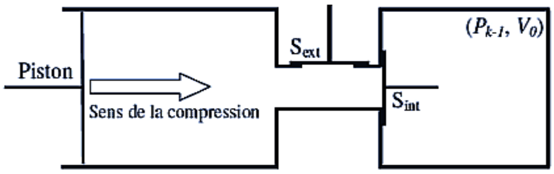
(1) État initial:

La soupape interne S_{int} est fermée, la soupape externe S_{ext} est ouverte. La pression dans le corps de pompe, à l'issue du (k–1) ième coup de piston, est P_{k-1}, le piston est rempli d'air pris dans les conditions de pression de l'atmosphère extérieure.

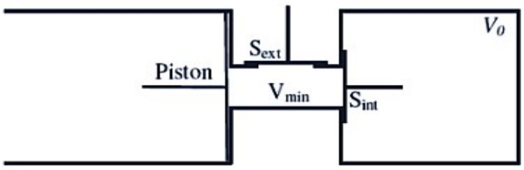


(2) Compression:

On ferme la soupape externe S_{ext}, le volume du piston varie de son volume maximum V_{max} à son volume minimal V_{min} indispensable au jeu des soupapes.



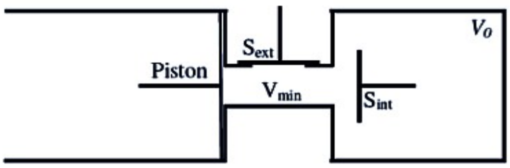
Fermeture de S_{ext}



Fin de compression

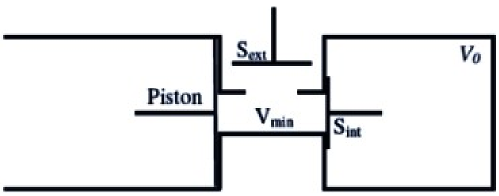
(3) Ouverture de S_{int}:

On ouvre la soupape interne S_{int} pour faire entrer l'air comprimé dans le corps de la pompe.

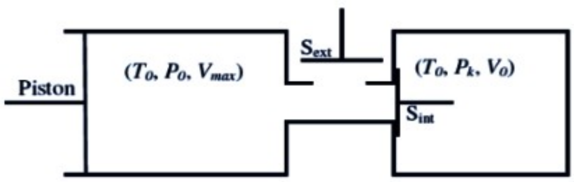


(4)Fin du cycle:

On ferme la soupape interne S_{int} puis on ouvre la soupape externe S_{ext}, la pression dans le corps de pompe est maintenant P_k. Il reste à ramener le piston dans sa position initiale et le k ième coup de piston est terminé.



Fermeture de S_{int}



État final

Analyse

1. Déterminer la quantité de matière n_{k-1} présente dans le corps de pompe dans l'état initial. On donnera le résultat en fonction de P_{k-1}, R, T_0 et V_0 le volume du corps de la pompe.

2. Déterminer la quantité de matière n_0 présente dans le piston à l'état initial.

3. Grâce à l'analyse des étapes 3 et 4, montrer que la pression obéit à une relation de récurrence de la forme $P_k = \alpha.P_{k-1} + \beta$. On déterminera α et β en fonction de P_0, V_0, V_{min} et V_{max}.

4. Exprimer la pression limite P_∞ que l'air peut atteindre dans le corps de pompe.

5. En déduire la valeur du rapport $\frac{V_{max}}{V_{min}}$ pour obtenir $P_\infty = 15$ bars.