Devoir en autonomie - produit scalaire

L'usage de calculatrices est interdit.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.
Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand $a_n \neq 0$ et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P.

Pour tout entier naturel n, on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1. Pour tout entier naturel n, préciser le domaine de continuité et le domaine de dérivabilité de c_n.

2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x), c_3(x)$.

3. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormal les fonctions c_0, c_1, c_2, c_3.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [-1, 1],\ c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.

5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que pour tout n, la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_n(x) = c_n(x)$.

Partie II.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.
Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.

1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\, d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
Calculer $I_{p,p}$.

1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ définie en partie **I** est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

1.d. Prouver que pour tout entier naturel n non nul, T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X^n|T_n) = \dfrac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des réels et $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

2.a. Justifier l'existence d'une unique famille de réels $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que l'on ait :

$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k.$$

2.b. Calculer b_n.

2.c. Montrer que l'on a : $\|P\|^2 \geqslant \dfrac{\pi}{2} b_n^2$.

2.d. En déduire la valeur de :

$$\inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie **I**.

2. **2.a.** Montrer que l'application $P \mapsto (P(x_1), \cdots, P(x_n))$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

2.b. En déduire que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique polynôme L_i tel que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2.c. Montrer que la famille $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. **3.a.** Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \ \text{ avec } \ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

3.b. Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

i. Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que : $R = ST_n + U$.

ii. Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

3.c. Dans toute cette question on fixe $k \in [\![1, n]\!]$.

i. On rappelle que : $\forall x \in [-1, 1],\ T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie **I.**). Montrer que

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1 - x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin(\theta_k)}$$

ii. Soit la fonction $\psi_k\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq x_k,\ \psi_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x - x_k) T_n'(x_k)} \quad \text{et} \quad \psi_k(x_k) = 1$$

Vérfier que, pour tout réel x : $\psi_k(x) = L_k(x)$.

iii. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$$

En déduire que l'intégrale $u_j = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta$ existe.

iv. Montrer que :

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)$$

v. Vérifier que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j = 0$$

vi. En déduire que : $\lambda_k = \dfrac{\pi}{n}$.

4. Démontrer que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a la relation :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$$