Devoir en autonomie - corrigé

Partie I.

1. La fonction cos est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction arccos est définie et continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Par composition, on en déduit que c_n est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

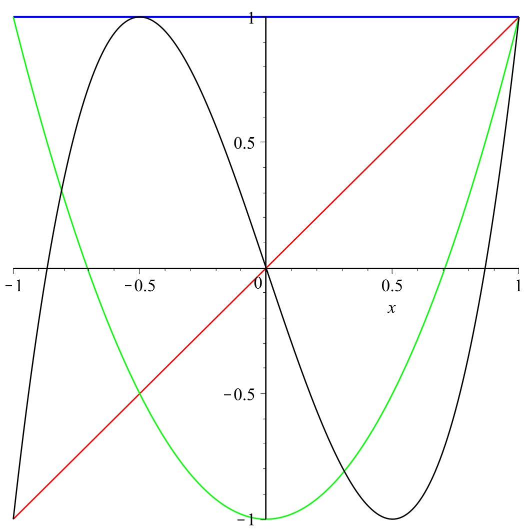
2. $\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x$. On a alors immédiatement :

$$c_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad c_1(x) = x$$

Les formules élémentaires de trigonométrie donnent :

$$c_2(x) = 2x^2 - 1,\ c_3(x) = 4x^3 - 3x$$

3. c_0 et c_1 sont représentées par des segments. c_2 est représentée par un arc de parabole de sommet $(0,-1)$.
c_3 est impaire. Sa dérivée s'annule en $\pm\dfrac{1}{2}$ et c_3 est décroissante entre ces deux valeurs.
On obtient la représentation suivante :



4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$. En posant : $\theta = \arccos(x)$, on a : $c_n(x) = \cos(n\theta)$.
Comme $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$, on obtient :

$$c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x).$$

5. On montre par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

T_n est un polynôme, $\deg(T_n) = n$ et si $n \geqslant 1$ le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

- Initialisation : T_0 est un polynôme constant. T_1 est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant égal à $1 = 2^0$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que la propriété est vraie aux rang $n-1$ et n. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est un polynôme de degré au plus $n+1$ (différence de deux tels polynômes). Le coefficient de X^{n+1} est égal à deux fois le coefficient dominant de T_n donc à 2^n et T_{n+1} est donc de degré égal à $n+1$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

La propriété est héréditaire. Or elle est vraie aux rangs 0 et 1 donc, par récurrence double, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est échelonnée en degrés (ou "de degrés étagés") donc elle est libre. De plus, elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et cet espace est de dimension $n+1$, donc elle est libre et maximale.

$$(T_0, \ldots, T_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

7. Soit $x \in [-1, 1]$. On montre par récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(x) = c_n(x).$$

- Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après la question I.2.
- Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que la propriété est vraie aux rang $n-1$ et n. On a alors : $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \underset{H.R}{=} 2xc_n(x) - c_{n-1}(x) = c_{n+1}(x)$, d'après I.4.

La propriété est héréditaire. Or elle est vraie aux rangs 0 et 1 donc, par récurrence double, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Partie II.

1.a. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$.
De plus, les fonctions P et Q sont continues sur le segment $[-1, 1]$ donc elles y sont bornées. Il existe donc une constante K telle que :

$$\forall x \in [-1, 1], \ \left|\frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leqslant \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction $w : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1, 1[$. Comme elle est paire, pour montrer qu'elle est intégrable sur $]-1, 1[$, il suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[0, 1[$. Or : $w(x) \sim_1 \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ converge (par calcul immédiat ou en se ramenant à une intégrale de Riemann convergente). Par équivalent positif, on en déduit que w est intégrable sur $[0, 1[$ et donc sur $]-1, 1[$ par parité.
La majoration précédente montre alors, par comparaison de fonctions positives, que la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$.
On peut donc définir l'application $\varphi : (P, Q) \mapsto (P|Q)$ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$.

On vérifie immédiatement que φ est symétrique et linéaire par rapport à la seconde variable. Elle est donc bilinéaire.

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geqslant 0$ car on intègre une fonction positive et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant.
Supposons $(P|P) = 0$. Comme la fonction intégrée est positive et continue sur $]-1,1[$, on en déduit que P est nulle sur $]-1,1[$. Le polynôme P admet alors une infinité de racines, donc il est nul. φ est donc définie-positive.

$$\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].$$

1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta))\,d\theta$$

Si $p \neq q$, alors : $p+q \neq 0$ et $p-q \neq 0$, d'où : $I_{p,q} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((p+q)\theta)}{p+q} + \dfrac{\sin((p-q)\theta)}{p-q}\right]_0^{\pi} = 0.$
Si $p = q = 0$, $I_{0,0} = \displaystyle\int_0^{\pi} d\theta = \pi$.
Si $p = q \neq 0$, $I_{p,p} = \dfrac{\pi}{2}$.

1.c. Soit p et q dans $[\![0,n]\!]$. $(T_p|T_q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
On effectue le changement de variable $x = \cos(\theta)$. La fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante et bijective de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$.
Sachant d'après I.7 que : $T_n(\cos(\theta)) = c_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ quand $\theta \in]0,\pi[$, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta = I_{p,q}.$$

La famille $(T_0,\dots,T_n)$ est ainsi orthogonale d'après la question précédente.
Mais cette famille n'est pas orthonormale puisque : $\|T_0\|^2 = \pi$ et $\forall k \geqslant 1,\ \|T_k\|^2 = \pi/2$.

1.d. T_n étant orthogonal à $T_0,\dots,T_{n-1}$, il est orthogonal à $\mathrm{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1.e. Pour $n \geqslant 1$, $T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après **I.5**. Il est donc orthogonal à T_n : $(T_n|T_n - 2^{n-1}X^n) = 0$, d'où : $\|T_n\|^2 - 2^{n-1}(T_n|X^n) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on obtient :

$$(T_n|X^n) = \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2^n}$$

2.a. La famille $(T_0,\dots,T_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose de façon unique dans cette base :

$$\exists!(b_0,\cdots,b_n) \in \mathbb{R}^n, P = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k$$

2.b. $(P|T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k(T_k|T_n) + b_n\|T_n\|^2$.
La famille $(T_0,\dots,T_n)$ étant orthogonale, on en déduit : $(P|T_n) = b_n\|T_n\|^2 = b_n\dfrac{\pi}{2}$.
On a alors : $b_n\dfrac{\pi}{2} = (X^n|T_n) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(X^k|T_n)$.
Or T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où : $b_n\dfrac{\pi}{2} = (X^n|T_n) = \dfrac{\pi}{2^n}$.

$$b_n = \frac{2(X^n|T_n)}{\pi} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

2.c. Le théorème de Pythagore donne :

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} b_k^2 \|T_k\|^2 \geqslant b_n^2 \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2} b_n^2.$$

2.d. On vient de voir que :

$$\forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \quad \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \geqslant \frac{\pi}{2^{2n-1}} \qquad (*)$$

Ainsi, la borne supérieure α étudiée existe dans $\mathbb{R}$ et, comme c'est le plus grand des minorants, on a : $\alpha \geqslant \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$.

$\dfrac{T_n}{2^{n-1}}$ étant un polynôme unitaire de degré n, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que ce polynôme s'écrive $X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Pour ce choix des a_k, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \left\| \frac{T_n}{2^{n-1}} \right\|^2 = \frac{\|T_n\|^2}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \qquad (**)$$

On en déduit que : $\alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$ et ainsi :

$$\inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_{-1}^{1} \frac{(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

On peut remarquer que cette borne inférieure est, de fait, un minimum.

Partie III.

1. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. On a $x_k \in [-1, 1]$ et donc $T_n(x_k) = c_n(x_k)$. Comme $\theta_k \in [0, \pi]$, $c_n(x_k) = \cos(n\theta_k) = 0$ car $n\theta_k = \pi/2[\pi]$. $x_1, \dots, x_n$ sont donc des racines de T_n.
Elles sont distinctes car cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ et car les θ_k sont des éléments distincts de $[0, \pi]$.
Comme $\deg(T_n) = n$, T_n admet au plus n racines donc $x_1, \dots, x_n$ sont exactement les racines de T_n et ce sont, en plus, des racines simples.

2.a. Soit $\psi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (P(x_1), \cdots, P(x_n))$.
On vérifie la linéarité de ψ : $\forall (P_1, P_2), \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \psi(P_1) + \lambda_2 \psi(P_2)$.
Soit $P \in \ker(\psi)$: $\forall k \in [\![1, n]\!], P(x_k) = 0$ donc P a au moins n racines distinctes. Or P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, donc il est nul.
Ceci prouve que : $\ker(\psi) = \{0\}$, et donc ψ est injective.
De plus : $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc ψ est bijective. Ainsi :

$$\psi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

2.b. En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le n-uplet $(\delta_{i,1}, \cdots, \delta_{i,n})$ admet un unique antécédent par ψ, i.e il existe un unique polynôme L_i tel que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i(j) = \delta_{i,j}.$$

Les polynômes L_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $x_1, \cdots, x_n$.

2.c. La famille $\mathcal{L}$ comporte n vecteurs et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$.
Montrons que cette famille est libre :
Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ des réels tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,k} = 0$, soit : $\alpha_k = 0$.
Ainsi, $\mathcal{L}$ est une famille libre et maximale, donc c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3.a. Soit $G \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. G se décompose dans la base $\mathcal{L}$ sous la forme : $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i L_i$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on évalue G en x_k, d'où : $G(x_k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(x_k) = a_k$. Ainsi :

$$G = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) L_i.$$

Sachant que les intégrales convergent (d'après II.1.a) on en déduit :

$$\int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) \int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i)$$

en posant : $\lambda_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{L_i(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

3.b.i Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (S, U) tel que : $R = T_n S + U$ avec $\deg(U) < \deg(T_n)$ i.e $U \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $T_n S = R - U$ est de degré au plus $2n-1$ et T_n de degré n ; S est donc de degré au plus $n-1$.

3.b.ii $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = (R|1) = (ST_n|1) + (U|1)$.
Or, par la définition du produit scalaire, on remarque que : $(ST_n|1) = (S|T_n)$ et T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ d'après II.1.d donc : $(S|T_n) = 0$.
En appliquant le résultat de la question III.3.a au polynôme U élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on obtient : $(U|1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U(x_i)$.
Or pour tout i : $R(x_i) = S(x_i) T_n(x_i) + U(x_i) = U(x_i)$ puisque, d'après III.1, les x_i sont les racines de T_n.
On obtient donc :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

3.c.i D'après I.7, on a : $\forall \theta \in [0, \pi],\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
Dérivons cette relation :

$$\forall \theta \in [0, \pi],\ \sin(\theta) T_n'(\cos(\theta)) = n \sin(n\theta)$$

De plus : $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$ car $\theta \in [0, \pi]$ donc son sinus est positif.
En particulier, pour $\theta = \theta_k$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sqrt{1 - x_k^2}\ T_n'(x_k) = n \sin(n\theta_k) = n(-1)^{k+1}$$

Comme $x_k \neq \pm 1$, on en déduit :

$$T_n'(x_k) = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1} n}{\sin(\theta_k)}$$

3.c.ii x_k est racine de T_n donc $X - x_k$ divise T_n. De plus, T_n est de degré n, donc ψ_k est un polynôme et son degré vaut $n-1$: $\psi_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $i \neq k$, on a : $T_n(x_i) = 0$ d'où : $\psi_k(x_i) = 0$.
De plus : $\psi_k(x_k) = 1$.
Par unicité, on déduit de la question III.2.b que :

$$\psi_k = L_k.$$

3.c.iii En multipliant haut et bas par $\theta - \theta_k$ on voit apparaître deux taux d'accroissement et on a alors :

$$\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} = \frac{j \sin(j\theta_k)}{\sin(\theta_k)}$$

L'application $\theta \mapsto \dfrac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$ est continue sur $[0, \pi] \setminus \{\theta_k\}$ (toujours par bijectivité de cos sur $[0, \pi]$, le dénominateur ne s'annule qu'en θ_k). On vient de voir qu'elle est prolongeable par continuité en θ_k.
Son intégrale u_j sur le segment $[0, \pi]$ existe donc bien.

3.c.iv Par définition de λ_k et d'après la question III.3.c.2, on a :
$\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) - T_n(x_k)}{(x - x_k) T_n'(x_k) \sqrt{1-x^2}} dx$, car : $T_n(x_k) = 0$.
On effectue à nouveau le changement de variable $x = \cos(\theta)$, d'où :
$\lambda_k = \dfrac{1}{T_n'(x_k)} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta) - \cos(n\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta = \frac{1}{T_n'(x_k)} u_n.$
La question III.3.c.i donne alors :

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k).$$

3.c.v Pour $j \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{j+1} + u_{j-1} &= \int_0^{\pi} \frac{\cos((j+1)\theta) - \cos((j+1)\theta_k) + \cos((j-1)\theta) - \cos((j-1)\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta)\cos(\theta) - \cos(j\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta)\cos(\theta) - \cos(j\theta)\cos(\theta_k) + \cos(j\theta)\cos(\theta_k) - \cos(j\theta_k)\cos(\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \left(\cos(j\theta) + \cos(\theta_k) \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} \right) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \cos(j\theta)\, d\theta + 2\cos(\theta_k) u_j \\
&= 2\cos(\theta_k) u_j
\end{aligned}$$

Par un décalage d'indice, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ u_{j+2} - 2u_{j+1}\cos(\theta_k) + u_j = 0$$

3.c.vi La suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2\cos(\theta_k)r + 1 = 0$. Elle a pour racines $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$.
On en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ u_j = a\cos(j\theta_k) + b\sin(j\theta_k)$$

Or $u_0 = 0$ donc $a = 0$ et $u_1 = \pi$ donc $b = \dfrac{\pi}{\sin(\theta_k)}$ $(\sin(\theta_k) \neq 0)$. Ainsi,

$$u_n = \pi\frac{\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \pi\frac{(-1)^{k+1}}{\sin(\theta_k)}$$

et avec III.3.c.iv :

$$\lambda_k = \frac{\pi}{n}$$

4. On déduit de la question III.3.b.ii que, pour tout $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} R(x_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$$