QCM : Algèbre linéaire

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u : Vrai.

2. $E = \mathbb{R}^4$ muni de la base canonique. $u(e_1) = e_3, u(e_2) = e_4, u(e_3) = u(e_4) = 0$.
   (a) Déterminer l'image et le noyau de u : $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(e_3, e_4)$.
   (b) u est-il diagonalisable ? Non
   (c) Justifier.
   Sinon $\chi_u = X^4$ conduirait à u endomorphisme nul, en prenant une base de diagonalisation.
   (d) Que peut-on dire de l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$?
   $u_{|\operatorname{Im}(u)}^{|\operatorname{Im}(u)} = 0$ est l'endomorphisme nul.

3. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre. Que peut-on dire de la dimension de $\ker(A - \lambda I_n)$? Comprise entre 1 et la multiplicité de λ.
   (b) On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre ? Il est égal à 1.
   (c) Justifier.
   C.S. de diagonalisabilité

4. (a) Si une matrice B est diagonalisable, alors la matrice $3B$ est diagonalisable et a les mêmes valeurs propres. Faux
   (b) Si les matrices B et C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont diagonalisables, alors $B - C$ est toujours diagonalisable. Faux
   (c) Si k est une valeur propre de B alors k^n est valeur propre de B^n. Vrai
   (d) Les matrices B et $3B$ ont les mêmes sous-espaces propres. Vrai

5. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant p + 1$. De manière générale :
   (a) $MM^T = M^T M$. Faux
   (b) MM^T est inversible. Faux
   (c) MM^T est diagonalisable. Vrai
   (d) M et $M^T M$ ont le même noyau. Vrai

6. Pour les questions 6 à 8, $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. On nomme C_1, C_2, C_3 les colonnes de A.

   Comme $C_3 = 3C_1$, $\mathrm{Im}(f) = Vect(e_1 - e_2 + 3e_3, -e_1 + 2e_2 - 3e_3)$.
   $\ker(f) = Vect(-3e_1 + e_3)$
   On a $\mathrm{Im}(f) \perp \ker(f)$, donc par thé du rang, $E = \mathrm{Im}(f) \oplus^{\perp} \ker(f)$

   (a) $\mathrm{rg}(A) = 3$. Faux

   (b) $\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = 3$. Vrai

   (c) $\det(A)$ est non nul. Faux

   (d) A est semblable à la matrice B dont les colonnes sont $C_1 - C_2, C_2 - C_3, C_3$. Faux

7. (a) Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Vrai

   (b) Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que : $A = QDQ^T$. Faux

   (c) Si A' est la matrice de f dans la base $(-e_1, -e_2, -e_3)$ alors : $\det(A) = -\det(A')$. Vrai car $\det(A) = 0$

   (d) Si A' est la matrice de f dans la base $(e_1, e_2 + e_1, e_1 + e_3)$ alors A' est diagonalisable. Vrai

8. (a) $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires. Vrai

   (b) $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ ne sont pas supplémentaires orthogonaux. Faux

   (c) L'orthogonal de $\ker(f)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Im}(f)$. Faux

   (d) $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace propre de f. Faux