Démonstrations EVN

Une partie A de E est ouverte si et seulement si son complémentaire est fermé

Démonstration. On peut procéder par double implication.

Supposons tout d'abord que A est ouverte. Observons alors le complémentaire B de A, et prenons une suite u d'éléments de A, convergente **dans** E. Pour tout $r > 0$, il existe n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $||u_n - l|| < r$. Ceci impose que toute boule centrée en l, quel que soit son rayon, possède au moins un élément de B : elle ne peut être incluse dans A. Puisque A est ouvert, la limite l de u ne peut donc être un élément de A. (Rappel : tout élément d'un ouvert est centre d'une boule incluse dans cet ouvert).

L'implication retour fonctionne sur le même modèle. Supposons que le complémentaire B de A soit fermé. Alors toute suite convergente dans E d'éléments de B converge dans B. Soit x un élément de E, tel qu'aucune boule centrée en x ne soit incluse dans A. Alors, on peut construire une suite d'élément de B convergeant vers x, et x appartient à B (pour $r = \frac{1}{n}$, la boule de rayon $\frac{1}{n}$ centrée en x n'est pas incluse dans A et comporte donc au moins un élément de B y : on pose $u_n = y$. Il reste à montrer - sans difficulté - la convergence de cette série vers x). Récapitulons : tout élément qui n'est pas dans l'intérieur de A est dans B, et n'est donc pas dans A. Par contraposée, la partie A est ainsi incluse dans son intérieur : c'est une partie ouverte de E.

Le point 2 s'obtient en observant que le complémentaire dans E du complémentaire dans E est la partie de départ.

On remarque au passage que E étant ouvert et fermé, son complémentaire dans E, l'ensemble vide, est également ouvert et fermé. □

Limite en un point de l'ensemble de définition (propriété 12) Si $a \in A$ et si f admet une limite b en a, alors $b = f(a)$.

Démonstration. On utilise la définition de limite qui vient juste avant la proposition. On observe que a est dans A.

Or pour tout $\varepsilon > 0$, $||a - a|| = 0$, donc $||f(a) - b|| < \varepsilon$. Le seul réel positif inférieur à tout réel strictement positif est 0. Par l'axiome de séparation de la norme, on en déduit que $f(x) = b$.

□

$N : u \mapsto \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|u_n|\}$ est une norme sur l'ensemble des suites réelles bornées.

Démonstration. Notons A l'ensemble des $|u_n|$. Cet ensemble est une partie de $\mathbb{R}^+$, non vide (il contient entre autres $|u_1|$), et majorée, puisque u est une suite bornée. L'ensemble A admet donc une borne sup, et l'application N est bien définie sur l'ensemble des suites bornées.

Attention !, si les suites n'avaient pas été bornées, il n'en aurait pas été ainsi.

La séparation se montre aisément, mais il faut néanmoins ne pas bâcler le raisonnement. Soit u suite réelle bornée, telle que $N(u) = 0$. Ceci se réécrit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|u_n|\}$, et, par définition de la borne supérieure, pour tout n $0 \leqslant |u_n| \leqslant N(u) = 0$. Par encadrement, pour tout n, $|u_n| = 0$, puis $u_n = 0$.

Soient maintenant λ un réel (non nul, le cas $\lambda = 0$ étant évident à traiter) et u une suite réelle bornée. La suite λu est encore une suite réelle bornée, et on peut dans la suite utiliser $N(\lambda u)$.

Soit $n \in N$ quelconque, $|\lambda||u_n| = |\lambda u_n| \leqslant N(\lambda u)$. Puisque λ est non nul, l'inéquation précédente se réécrit $|u_n| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda u)$. Le réel $\frac{1}{|\lambda|}N(\lambda u)$ est un majorant de tous les termes $|u_n|$, il est donc plus grand (ou égal) au plus petit des majorants de l'ensemble de ces termes, qui est $N(u)$: ainsi $N(u) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}N(\lambda u)$.

Inversement, $N(u) \geqslant |u_n| = \frac{1}{|\lambda|}|\lambda u_n|$, puis, puisque λ est non nul, $|\lambda u_n| \leqslant |\lambda|N(u)$. Puisque $|\lambda|N(u)$ est un majorant des $|\lambda u_n|$ et par définition de la borne supérieure, $N(\lambda u) \leqslant |\lambda|N(u)$.

On conclut par double inégalité.

⚠**A retenir !** Lorsqu'il y a des bornes supérieures ou inférieures, on n'affirme pas sauvagement, on revient à la définition même de la borne sup (inf).

Pour l'inégalité triangulaire, le même travail, propre, est à faire. En général, c'est le seul point qui peut demander du travail lorsqu'il s'agit de vérifier qu'une application est une norme (on a un joli contre-exemple, classique, ici).

Soient donc u et v deux suites réelles bornées. On montre aisément que $u + v$ est une suite réelle bornée, et est donc dans l'ensemble de définition de l'application N.

Pour $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$, puis par définition de N, $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant N(u)+N(v)$. Le plus petit des majorants des $|u_n+v_n|$, qui est $N(u+v)$ est inférieur à un quelconque de ces majorants, en l'occurence $N(u)+N(v)$. Ainsi, $N(u+v) \leqslant N(u)+N(v)$. □

Exercice feuille : Soit $(E, ||\ ||)$ un e.v.n., $a \in E$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte de centre a et de rayon r est la boule fermée de centre a et de rayon r.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la boule ouverte (qu'on note B ici) est incluse dans son adhérence et dans la boule fermée de même centre et même rayon. Ainsi, il n'y a que les points de la frontière qui pourraient poser problème. Dans ce cas précis, la frontière et la partie considérée n'ont d'ailleurs aucun point en commun, puisque la frontière est l'ensemble des points qui sont dans l'adhérence, auquel on retranche les points de l'intérieur. Or l'intérieur d'un ouvert est lui même (par définition).

Le contexte étant posé, venons-en à la démonstration :

Soit x appartenant à l'adhérence de la boule ouverte. Il existe x_n une suite d'éléments de B convergeant vers x. La norme étant continue, par composition $t \mapsto ||t-a||$ l'est également. La suite $||x_n - a||$ converge ainsi vers $||x-a||$. Or pour tout n, $||x_n - a|| < r$. Par passage à la limite, $||x-a|| \leqslant r$.

On n'a pas fini : pour le moment, on ne dispose que d'une inclusion. Il reste à montrer que tout point de la boule fermée est dans l'adhérence de la boule ouverte :

Soit x dans la boule fermée de centre a et de rayon r. Si $||x-a|| < r$, x est déjà dans la boule ouverte B.

Supposons maintenant que $||x-a|| = r$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que l'élément $x + \frac{1}{n}(a-x)$ est dans la boule fermée. En effet $||(x+\frac{1}{n}(a-x)) - a|| = ||\frac{n-1}{n}(x-a)|| = |\frac{n-1}{n}|||a-a|| \leqslant \frac{n-1}{n}r < r$. Notons x_n cet élément. On observe de plus que $||x_n - x|| = |\frac{1}{n}|||a-x||$ tend vers 0. On a ainsi construit une suite de la boule **ouverte** B convergeant vers x, qui est ainsi bien un point adhérent de B.

Remarque : l'adhérence de la boule ouverte est évidemment une partie fermée. C'est en fait le plus petit fermé contenant cette boule ouverte. Il en va de même en général : l'adhérence de la partie A est le plus petit fermé contenant A. De même, l'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A. $\square$