Exercice 1 ✰✰

Trouver une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ qui converge simplement sur $I=[0,1]$ mais non uniformément.

Exercice 2 ✰✰

Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n : t\mapsto (-1)^n\dfrac{t^n}{n+1}$ définie sur $J=[0,1[$.

Démontrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur J mais non normalement.

Notes

[1] correction exo 1 :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} t^n \text{ si} 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ si} t = 1 \end{cases}$$

$S_N(t) = \dfrac{1 - t^{N+1}}{1 - t}$ si $t < 1$, $S_N(1) = 0$, (S_N C.V.S sur I vers $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1-t} \text{ si} 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ si} t = 1 \end{cases}$

La convergence ne peut être uniforme, car sinon, la suite de fonctions continues convergerait vers une fonction cotinue sur I.

---

[2] correction exo 2 :

$\|f_n\|_\infty^J = \dfrac{1}{n+1}$, pas de CVN

Via CSSA, à t fixé $\|S_N\|_\infty^J \leq \|f_{N+1}\|_\infty^J = \dfrac{1}{N+2}$
