Table des matières

I. Intégration et interversion 2

II. Série de fonctions 2

III. Continuité ou limites et interversion 4

IV. Dérivation et interversion 5

V. Comparaison de fonctions intégrables 6

VI. Réduction 7

VII. DSE usuels 8

I. Intégration et interversion

Proposition 1 (interversion limite-intégrale sur un segment).

Soient $I = [a,b]$ un segment, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)$ converge et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Théorème 2 (de convergence dominée, admis).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n| \le \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n\text{, pour } n\in\mathbb{N}\text{, et } f \text{ sont intégrables sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_{n\ge 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.

II. Série de fonctions

Définition 1.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{C}$, avec I intervalle.

On dit que $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ **converge simplement sur I** lorsque : $\forall x \in I$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n(x)$ converge.

Si tel est le cas, $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur I, est appelée fonction somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ et se note $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On dit que $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ **converge normalement sur I** lorsque la série numérique $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

On dit que $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ **converge uniformément sur I** lorsque $\|S - S_N\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, où

la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge 0} f_n$ converge simplement sur I vers S et en notant $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} f_k$ pour tout $N\in\mathbb{N}$

Proposition 3.

$CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$

Proposition 4 (utilisation d'une série majorante pour montrer la CVN).

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ un série de fonctions de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ une série numérique (positive) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq \alpha_n)$$

et telle que $\sum \alpha_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I.

Théorème 5 (Intégration terme à terme sur un segment).

Soient $I=[a,b]$ un segment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, telle que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge et : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\ \mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t$

Théorème 6 (d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** et **intégrable** sur I ;

ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** sur I vers une fonction S **continue par morceaux sur** I ;

iii) la série numérique $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge. (hypothèse de domination)

Alors la somme S de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est intégrable sur I, la série $\boxed{\sum_{n\geq 0} \int_I f_n \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

Théorème 7 (de primitivation terme à terme de la somme d'une série entière).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ une série entière (de la var. réelle) de rayon de convergence R, et f sa somme. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ a un rayon de convergence R, et sa somme F est la primitive de f valant 0 en 0.

$\forall x \in]-R,R[,\ \boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \mathrm{d}t}$

De plus, toute primitive P sur $]-R,R[$ de $f:\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de la forme :

$$P : x \longmapsto P(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

III. Continuité ou limites et interversion

Proposition 8 (continuité de la limite uniforme).

Soient I un intervalle réel, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, qui converge uniformément sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. Alors f est continue sur I.

Proposition 9 (continuité de la somme d'une série de fonctions).

Soient I un intervalle réel, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, telle que la série de fonctions $\sum n \geq 0 u_n$ converge uniformément sur I vers $S \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est continue sur I.

Théorème 10 (de continuité d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A,\ \ f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur I ;
(f cont. p. morc. % à t)

ii) pour tout $t \in I,\ \ f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A ; (f continue % à x)

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination de $f(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % à t)

Alors la fonction $\boxed{g : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Théorème 11 (de convergence dominée à paramètre continu).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I,\ f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A,\ t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\ \mathrm{d}t.}$

Théorème 12 (de la double limite).

si une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

IV. Dérivation et interversion

Proposition 13 (dérivation de la limite)**.**

Soient I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, et telle que la suite (f'_n) de ses dérivées converge uniformément sur I vers $h \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

Théorème 14 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions)**.**

Soient I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I (resp. sur tout segment de I) vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$, et telle que la série $\sum u'_n$ de ses dérivées converge uniformément sur I vers $T \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S' = T$.

Théorème 15 (de dérivation terme à terme de la somme d'une série entière)**.**

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et S sa somme. Alors

1) $S :]-R,R[\to \mathbb{C}$ est dérivable sur $]-R,R[$ et

$\forall t \in]-R,R[$, $\boxed{S'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} (m+1) a_{m+1} t^m}$.

2) S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+k)!}{m!} a_{m+k} t^m$$

Proposition 16 (dérivations successives de la limite)**.**

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, qui converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, telle que les suites $(f_n^{(i)})$ CVS sur I vers $h_i \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$, et telle que la suite $(f_n^{(k)})$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I vers $h_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f^{(i)} = h_i$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

Proposition 17 (Dérivations succesives de la somme d'une série de fonctions)**.**

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, telle que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers $S \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ et que les séries $\sum u_n^{(i)}$ CVS sur I vers $S_i \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,k-1]\!]$, et telle que la série $\sum u_n^{(k)}$ de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I) vers $S_k \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
Alors S est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $S^{(i)} = S_i$, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

Théorème 18 (de dérivation d'une intégrale à paramètre (admis, preuve non exigible)).

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \to \mathbb{K}, \ (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$ la fonction $\begin{array}{rcl} f_{x,\bullet} : I & \to & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** **intégrable** sur I ;

ii) Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;

iii) pour tout $x \in A$ la fonction $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,\bullet} : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \end{array}$ est **continue par morceaux** sur I ;

iv) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **positive** , **continue par morceaux** et **intégrable** sur I telle que :
pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$.
(hypothèse de domination de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\bullet)$ par une fonction intégrable % t)

Alors la fonction $\boxed{g : A \to \mathbb{K}, \ x \mapsto \int_I f(x,t) \ \mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } A}$ et pour tout $x \in A$ on a $\boxed{g'(x) = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ \mathrm{d}t}$.

V. Comparaison de fonctions intégrables

Proposition 19.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^\gamma \ \mathrm{d}t$ converge ssi $\gamma > -1$.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\beta \ \mathrm{d}t$ converge ssi $\beta < -1$.

Théorème 20 (de comparaison).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t \to \beta}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable en β.
2. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t \to \beta}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable en β.
3. Si $f(t) \underset{t \to \beta^-}{\sim} g(t)$, f est intégrable en β si et seulement si g est intégrable en β.

VI. Réduction

Définition 2 (valeur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ tel que :
(1) $\begin{cases} \overrightarrow{v} & \neq & \overrightarrow{0} \\ u(\overrightarrow{v}) & = & \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$
Pour un tel vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ (NON NUL), on dit que la valeur propre λ est associé au vecteur (propre) $\overrightarrow{v}$.

Définition 3 (vecteur propre).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ est dit **vecteur propre** de u si $\begin{cases} \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E} \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}; \quad u(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} \end{cases}$ Pour un tel $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que le vecteur propre $\overrightarrow{v}$ est associé à la valeur (propre) λ.

Théorème 21 (CNS de diagonalisabilité).

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $s \in \mathbb{N}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}, \ldots, m_{\lambda_s}$, et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_s}$ leurs sous-espaces propres respectifs.
On suppose que le **polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.**
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) **u est diagonalisable** sur $\mathbb{K}$;

ii) $\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}}$;

iii) $\boxed{\forall i \in [\![1, s]\!],\ \dim(E_{\lambda_i}) = m_{\lambda_i}}$ et $\sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} = n$.

iv) $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim(E_\lambda)$.

Théorème 22 (CNS de diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs).

$u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** (sur $\mathbb{K}$)
si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé $\boxed{\text{à racines simples}}$
si et seulement si $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u

Proposition 23 (CS de diagonalisabilité).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique χ_u.
Si $\boxed{\chi_u \text{ est scindé}}$ $\boxed{\textbf{à racines simples}}$ sur $\mathbb{K}$, alors $\boxed{u \text{ est diagonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$.

Proposition 24 (C.N.S de trigonalisabilité).

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$ sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $\boxed{\text{le polynôme caractéristique}}$ χ_A de A est $\boxed{\text{scindé}}$ sur $\mathbb{K}$.

i.e. ssi $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{K});\ T = P^{-1}AP$ triangulaire

Théorème 25 (Théorème spectral).

un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.
(associés à des valeurs propres réelles)

Théorème 26 (théorème spectral, version matrices symétriques réelles).

Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $P^TAP = D$

Définition 4 (Endomorphisme auto-adjoint positif).

Un **endomorphisme auto-adjoint** $u \in \mathcal{S}(E)$ est dit **positif** si : $\forall x \in E,\ < x|u(x) > \geq\ 0$

Notation 1. *On note* $\mathcal{S}^+(\mathbf{E}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{E})\ ;\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},\ < \mathbf{x}|\mathbf{u}(\mathbf{x}) > \geq \mathbf{0}$ *l'ensemble des auto-adjoints positifs de* E.

Définition 5 (Endomorphisme auto-adjoint défini positif).

Un **endomorphisme auto-adjoint** $u \in \mathcal{S}(E)$ est dit **défini positif** si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ < x|u(x) > >\ 0$

Notation 2. *On note* $\mathcal{S}^{++}(\mathbf{E}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{E})\ ;\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{0_E}\},\ < \mathbf{x}|\mathbf{u}(\mathbf{x}) > > \mathbf{0}\}$ *l'ensemble des auto-adjoints positifs de* E.

VII. DSE usuels

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^p,\ \forall t \in]-1,1[$$

$$\ln(1+t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}t^p}{p},\ \underline{\text{pour tout } t \in]-1,1]}$$

$$\ln(1-t) = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p},\ \text{pour tout } t \in [-1,1[$$

$$\text{Arctan}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{2p+1},\ \text{pour tout } t \in [-1,1]$$

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!},\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\sin t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\ t^{2p+1}}{(2p+1)!},\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\cos t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\ t^{2p}}{(2p)!},\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$e^{tz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} t^k,\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } z \in \mathbb{C} \text{ fixé}}$$

$$\text{sh}\, t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!},\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$\text{ch}\, t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!},\ \underline{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}}$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n,$$
$\underline{\text{pour tout } t \in]-1,1[, \text{ pour } \alpha \text{ réel fixé}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n,\ \text{pour tout } t \in]-1,1[$$
(car $\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$)