Algèbre Linéaire

Ce qu'il faut retenir de P.C.S.I

Cours de Mathématiques
D. Zarouf
C.P.G.E Brizeux
PSI

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces Vectoriels

1.1 Définition et règles de calcul

Définition 1. : On appelle, *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* (en abrégé $\mathbb{K}$-e.v), un ensemble E non vide et muni :

1. d'une loi de composition interne, notée $+$, appelée *addition de* E telle que :
   (a) $\forall (x,y) \in E \times E, x+y = y+x$
   (b) $\forall (x,y,z) \in E^3, (x+y)+z = x+(y+z)$
   (c) Il existe un élément de E, noté 0_E tel que : $\forall x \in E, x + 0_E = x$
   (d) $\forall x \in E, \exists y \in E, x+y = 0_E$. y est appelé « opposé de x »et est noté $-x$.
2. d'une loi de composition externe, (application de $\mathbb{K} \times E$ dans E), appelée *multiplication par un scalaire*, notée $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ et possédant les propriétés suivantes :
   (a) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$
   (b) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$
   (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$
   (d) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$

   Tout élément de E est appelé *vecteur* de l'e.v.

   Tout élément de $\mathbb{K}$ est appelé *scalaire*.

Propriété 1. Règles de calcul

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ 0 \cdot x = 0_E, \lambda \cdot 0_E = 0_E$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda \cdot x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$).

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (-\lambda)\cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x).$

4) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \ \begin{array}{l} \lambda \cdot (x-y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \\ (\lambda - \mu)\cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x \end{array}$

1.2 Exemples de référence

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

2) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-e.v et un $\mathbb{R}$-e.v.

3) L'ensemble des vecteurs du plan (resp : de l'espace) est un $\mathbb{R}$-e.v.

4) Soit A un ensemble quelconque, non vide.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

Soit $\mathcal{F}(A, E)$, l'ensemble des applications de A dans E. On munit cet ensemble des deux lois suivantes :

$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(A,E)^2$,

$$f+g : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}$$

$\forall f \in \mathcal{F}(A, E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rccl} \lambda \cdot f: & A & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

On vérifie que $\mathcal{F}(A, E)$ est un $\mathbb{K}$-e.v

Applications :

i) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

ii) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-e.v et $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-e.v.

5) L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$(resp : complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) est un $\mathbb{R}$-e.v (resp : $\mathbb{C}$-e.v).

6) L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 2. : Une partie F de E est appelée *sous-espace vectoriel de E* (en abrégé s.e.v de E) lorsque :

1) $F \neq \emptyset$.

2) F est stable pour l'addition de E, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$$

3) F est stable pour la multiplication externe de E, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$$

Propriété 2. Etant donné un sous espace vectoriel F de E, F muni des lois $+$ et $\cdot$ de E (appelées lois induites) devient un $\mathbb{K}$-e.v

Méthode *: Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-e.v, il sera plus simple de démontrer qu'il est s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v déjà connu*

Propriété 3. : **Caractérisation d'un s.e.v**.

F est un s.e.v de E si et seulement si :

1) $F \subset E$

2) $F \neq \emptyset$ $(0_E \in F)$

3) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + \mu y \in F$

Exemples :

1) $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v de E appelés s.e.v triviaux de E.

2) Soit $a \in E$

$\mathbb{K}\, a = \{\lambda\, a ; \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un s.e.v de E appelé *droite vectorielle engendrée par a*.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$ e.v (pour les lois usuelles) :

$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$: ens. des fonctions dérivables sur I.

4) L'ensemble des suites réelles (resp : complexes) bornées, l'ensemble des suites réelles (resp : complexes) convergentes, l'ensemble des suites réelles (resp : complexes) convergentes vers 0 sont des $\mathbb{R}$-e.v (resp : $\mathbb{C}$-e.v).

Propriété 4. : Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Etant donnée une famille $(F_i)_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels de E,

$F = \bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in F_i\}$ est un s.e.v de E.

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels- Sous-espaces supplémentaires

Propriété 5. Soit F_1 et F_2 deux s.e.v de E.
On note : $F_1 + F_2 = \{x \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\}$
$F_1 + F_2$ est un s.e.v de E.

Définition 3. : Soit F_1 et F_2 deux s.e.v de E. $F_1 + F_2$ est appelé *somme de F_1 et F_2*

Définition 4. : Soit F_1 et F_2 deux s.e.v de E.
F_1 et F_2 sont *supplémentaires* dans E lorsque leur somme est directe et égale à E :

$$F_1 \oplus F_2 = E$$

C'est à dire :

$$F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } F_1 + F_2 = E$$

Ou encore :

$$\forall x \in E,\ \exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2$$

1.5 Combinaisons linéaires - Familles génératrices

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition 5. Soit E un $\mathbb{K} - e.v.$
1) Soit $p \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **combinaison linéaire de** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, tout élément x de E tel qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, tel que :

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

On dit aussi que x est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.
2) Soit $(x_i)_{i \in I}$, où I est une **partie finie** de $\mathbb{N}$, une famille finie de vecteurs de E.
On dit qu'un élément x de E est **combinaison linéaire de** $(x_i)_{i \in I}$ lorsqu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires tels que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

Propriété 6. Soit E un $\mathbb{K} - e.v$, $p \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. Il est appelé **sous-espace vectoriel engendré par** $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ et noté $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.

A Retenir *: $x \in Vect(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ signifie qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ tels que* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

Propriété 7. Soit E un $\mathbb{K} - e.v$, $p \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
Si x_p est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$, alors $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_p) = \operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$. En d'autres termes, dans $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, on peut supprimer les vecteurs x_i qui sont combinaison linéaire des autres.

Définition 6. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit que cette famille est génératrice de E lorsque $E = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, c'est-à-dire que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.

On dit aussi que E est engendré par les vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Propriété 8. Soit E un $\mathbb{K} - e.v$, $p \in \mathbb{N}^*, (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.

$(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une famille génératrice de $F = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.
Si dans cette famille, il existe des vecteurs x_i combinaison linéaire des autres, la famille dans laquelle on a enlevé ces vecteurs combinaisons linéaires des autres, reste une famille génératrice de F.

1.6 Familles libres-liées

Définition 7. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E.

On dit que cette famille est libre (ou encore que les vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ sont linéairement indépendants) lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \, x_i = 0 \Longrightarrow \forall i, \lambda_i = 0$$

Une famille non libre est dite liée ou encore les vecteurs sont dits linéairement dépendants.
$((x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une famille liée lorsque :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{non tous nuls tels que} \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \, x_i = 0$$

Propriété 9. Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Propriété 10. 1. Une famille à un élément (x) est libre si et seulement si $x \neq 0_E$.
2. Toute famille contenant 0_E est liée.
3. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
4. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
5. Une famille est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

1.7 Bases

Définition 8. On appelle, base de E, toute famille libre et génératrice.

Théorème 1. Soit un $\mathbb{K}$-e.v E admettant une base finie $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Pour tout $x \in E$, il existe une famille et une seule $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de scalaires $(\lambda_i \in \mathbb{K})$ tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Définition 9. On appelle cette famille de scalaires *coordonnées (ou composantes) de x dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$*.

On écrit parfois $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1.8 Espace vectoriel de dimension finie

On appelle famille finie de vecteurs de E, toute famille ayant un nombre fini de vecteurs

Définition 10. On dit qu'un $\mathbb{K}$-e.v E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie de E.

Théorème 2. Théorème de la base incomplète : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

Soit $G = (g_i)_{i\in I}$ une famille génératrice finie de E.

Pour toute sous-famille libre $((g_i)_{i\in J}$ de G, il existe une partie M de $\mathbb{N}$ telle que $J \subset M \subset I$ et $(g_i)_{i\in M}$ soit une base de E.

Corollaire 1 : Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie admet une base finie.
Corollaire 2(qu'on appelle aussi Théorème de la base incomplète) : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, B une base finie de E et L une famille libre finie.

On peut complèter L en une base de E à l'aide de vecteurs de B.

Théorème 3. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

Toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Définition 11. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

Le nombre de vecteurs d'une base est appelé *dimension de E sur $\mathbb{K}$* noté $\dim_{\mathbb{K}}E$.

Cas particulier : $\dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$.

Exemples :

1. $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$ car une base est (1) car $\forall x \in \mathbb{R}, x = x.1$ et (1) est libre.
2. $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 1$ car une base est (1) car $\forall x \in \mathbb{C}, x = x.1$ et (1) est libre.
3. $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ car une base est $(1, i)$ car $\forall z \in \mathbb{C}, z = Re(z) \cdot 1 + Im(z) \cdot i$ et $(1, i)$ est libre.
4. $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}^n = n$ car une base est $(e_i)_{i\in\{1..n\}}$ où e_i est le vecteur de coordonnées nulles sauf sa ième qui vaut : On appelle cette base, *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
5. $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}_n[X] = n + 1$ et une base est $(X^i)_{i\in\{0..n\}}$: On appelle cette base, *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$. 6. Par contre $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas de dimension finie.

Propriété 11. : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie de dimension n.

Alors toute famille libre a au maximum n vecteurs et toute famille génératrice a au minimum n vecteurs.

Théorème 4. Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

On a les équivalences suivantes :
1. B est une base $\iff$ B est une famille libre à n vecteurs (dite famille libre maximale)
2. B est une base $\iff$ B est une famille génératrice à n vecteurs (dite famille génératrice minimale).

Propriété 12. Sous espace vectoriel en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un s.e.v de E.

Alors F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}F \leq \dim_{\mathbb{K}}E$.

De plus, $\dim_{\mathbb{K}}F = \dim_{\mathbb{K}}E \iff E = F$.

Propriété 13. Sous espaces vectoriels supplémentaires en dimension finie.

1. Tout sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.
2. Si $E = F \oplus G$, alors $\dim_{\mathbb{K}}F + \dim_{\mathbb{K}}G = \dim_{\mathbb{K}}E$.

Méthode : Pour trouver un supplémentaire d'un s.e.v F de E, on complète une base de F en une base de E et le s.e.v engendré par les vecteurs complétés constitue un supplémentaire de F dans E.

Propriété 14. Formule de Grassmann
Etant donnés des s.e.v F et G d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie E , on a :

$$\dim_{\mathbb{K}} F+G = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G - \dim_{\mathbb{K}} F \cap G$$

Corollaire : Etant donnés des s.e.v F et G d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie E , on a :

$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} E$$
$$F \oplus G = E \Longleftrightarrow F + G = E \text{ et } \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G = \dim_{\mathbb{K}} E$$

2 Applications Linéaires

Dans ce paragraphe, E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v (même $\mathbb{K}$ pour les deux).

2.0.1 Définitions - Exemples

Définition 12. Soit f une application de E dans F.
1) f est appelée *application linéaire* lorsque :
– $\forall (x,y) \in E \times E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
– et $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$
2) Un *isomorphisme d'espaces vectoriels* est une application linéaire bijective.
3) Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans E.
4) Un *automorphisme* est un endomorphime bijectif.

Notations :
On note par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Définition 13. On dit que E est isomorphe à F lorsqu'il existe un isomorphisme f de E dans F.
On note alors $E \simeq F$.

Remarque : $\forall f \in \mathcal{L}(E,F),\ f(0_E) = 0_F$.

Propriété 15. : *Caractérisation d'une application linéaire.*
Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K},\ f(\lambda\, x + \mu\, y) = \lambda\, f(x) + \mu\, f(y)$$

2.0.2 Noyau - Image

Définition 14. : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On appelle :
noyau de f : le s.e.v de E, noté $\mathrm{Ker}(f)$, défini par

$$\ker\, f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

image de f : le s.e.v de F, noté $\mathrm{Im}(f)$, défini par

$$\mathrm{Im}\, f = f(E) = \{y \in F / \exists x \in E,\ y = f(x)\} = \{f(x) / x \in E\}$$

Propriété 16. : Im f est un s.e.v de F et ker f est un s.e.v de E.

Propriété 17. : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f injective $\iff$ $\ker f = \{0_E\}$
f surjective $\iff$ $\mathrm{Im}\, f = F$

Propriété 18. : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $(v_i)_{1\le i\le p}$ est une famille génératrice de E, alors $(f(v_i))_{1\le i\le p}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

Propriété 19. : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v où E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E.

1. f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ est une base de F.
2. Si f est un isomorphisme, F est de dimension finie et de même dimension que E.

2.0.3 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 20. : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v.
$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire des applications.

Exemple : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, $Id - f \in \mathcal{L}(E)$ en tant que combinaison linéaire d'endomorphismes.

Propriété 21. : Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v.
On a : $\forall (f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2,\ \forall (g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$,
$g_1 \circ f_1 \in \mathcal{L}(E, G)$
$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$
$(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$
$(\alpha\, g_1) \circ f_1 = g_1 \circ (\alpha\, f_1) = \alpha\, (g_1 \circ f_1)$

Propriété 22. Formule du binôme de Newton

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \text{tel que } f \circ g = g \circ f, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}$$

Puis

$$f^n - g^n = (f - g) \circ (\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k})$$

où f^n désigne la composée de f n fois et $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Propriété 23. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Définition 15. L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-e.v E est appelé *groupe linéaire de E* et noté $GL(E)$.

Propriété 24.
1. $Id_E \in GL(E)$.
2. $\forall f \in GL(E), f^{-1} \in GL(E)$.
3. $\forall (f, g) \in GL(E) \times GL(E), f \circ g \in GL(E)$.

2.0.4 Etude d'endomorphismes particuliers : Projecteurs et Symétries

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.
On considère **deux sous-espaces vectoriels supplémentaires** F **et** G **de** E.
Ainsi $E = F \oplus G$.
On rappelle qu'alors :

$$(\star)\ \forall x \in E,\ \exists !(y,z) \in F \times G,\ x = y + z$$

On appelle **projecteur sur F parallèlement à G** (resp :**projecteur sur G parallèlement à F**), l' application suivante :

$$\begin{array}{rccc} p: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & y \text{ défini par } (\star) \end{array}$$

resp :

$$\begin{array}{rccc} q: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & z \text{ défini par } (\star) \end{array}$$

Propriétés de p et q :
1) p et q sont des endomorphismes de E et $p + q = \mathrm{Id}_E$.
2) $\ker(p) = G,\ \mathrm{Im}\,(p) = F,\ \ker(q) = F,\ \mathrm{Im}\,(q) = G$.
3) $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}\,(p) = E,\ \ \ker(q) \oplus \mathrm{Im}\,(q) = E$.
4) $p \circ p = p,\ q \circ q = q$.
Plus généralement :

Définition 16. : Soit E un $\mathbb{K} - e.v.$
On appelle *projecteur de* E tout endomorphisme p de E tel que : $p \circ p = p$

Propriété 25. : Soit p un projecteur de E.
Alors
- $\mathrm{Im}\, p \oplus \ker p = E$.
  Ainsi, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$.
- $\forall x \in E, x = \underbrace{(x - p(x))}_{\in \ker p} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p}$.
- $\forall y \in \mathrm{Im}\, p,\ p(y) = y$.
- $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur appelé projecteur associé à p.

Propriété 26. : Soit p un projecteur de E.
On pose $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
Pour tout $x \in E$, on pose $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_2 \in \ker p$.
Alors
1) $s(x) = x_1 - x_2$ c'est à dire que s **est la symétrie par rapport à Im** p **parallèlement à ker** p.
2) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ ie s est un automorphisme et $s^{-1} = s$ ($s \in GL(E)$).
3) $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = \ker p$

3 Calcul Matriciel

3.1 Définition d'une matrice

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Définition 17. : On appelle *matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans* $\mathbb{K}$ toute application de $\{1..n\} \times \{1..p\}$ dans $\mathbb{K}$.

Une telle application

$$A: \begin{array}{ccc} \{1..n\} \times \{1..p\} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & A(i,j) = a_{ij} \end{array}$$

est notée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

a_{ij} est appelé le $(i,j)^{\text{ime}}$ coefficient de A. Il est sur la $i^{ßme}$ligne et la $j^{ßme}$ colonne.

On dit que :

- A est une matrice carrée lorsque $n = p$ et alors A est dite matrice carrée d'ordre n.
  Dans ce cas,
  Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux de A.
  A est dite matrice diagonale lorsque $\forall (i,j)\ i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
  A est dite matrice triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j)\ i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
  A est dite matrice triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j)\ i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
- A est une matrice colonne lorsque $p = 1$.
- A est une matrice ligne lorsque $n = 1$.

Notation :
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3.2 Matrices et applications linéaires

3.2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On lui associe une application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ en posant, $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$ étant la base canonique de $\mathbb{K}^p$,

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

f est alors définie de manière unique par : $\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$ où $(x_j)_j$ sont les coordonnées de x dans $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$.

3.2.2 Matrice associée à un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $\dim E = n,\ B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E.
Soit $x \in E$.
On lui associe une matrice colonne formée par ses coordonnées dans B.

Propriété 27. L'application

$$Mat_B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

est une bijection.

3.2.3 Matrice associée à une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension p, $B_E = (e_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n, $B_F = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On lui associe une matrice notée $Mat_{B_E,B_F}(f)$ telle que sa j ième colonne corresponde aux coordonnées de $f(e_j)$ dans la base B_F.
Cas particuliers :
La matrice d'une forme linéaire (application linéaire de E dans $\mathbb{K}$) est une matrice ligne.
La matrice d'un endomorphisme de E est une matrice carrée.

3.3 Opérations sur les matrices

3.3.1 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 18.
1. On définit la matrice $A + B$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit la matrice $\lambda\, A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Propriété 28.
1. Avec cette addition et cette multiplication externe, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v. L'élément neutre pour l'addition est la matrice, appelée matrice nulle dont tous les coeffs sont nuls.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension p, $B_E = (e_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n, $B_F = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de F.
L'application

$$Mat_{B_E,B_F} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & Mat_{B_E,B_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Propriété 29.
Pour $(i,j) \in \{1..n\} \times \{1..p\}$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le (i,j) $^{\text{ième}}$ coefficient vaut 1 et tous les autres sont nuls. Ces np matrices sont appelées *les matrices élémentaires de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique.*

2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n\,p$.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension p et F un $\mathbb{K}$-e.v de dimension n.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,F) = n\,p$.

3.3.2 Multiplication de matrices

Définition 19.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice produit AB, appartenant à $\mathcal{M}_{\mathbf{n,q}}(\mathbb{K})$, par $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ où

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Remarques :
1. Revoir la pratique de ce produit matriciel.
2. En général $AB \neq BA$. Et d'ailleurs, il n'est pas toujours possible d'effectuer les deux produits matriciels (incompatibilité entre lignes et colonnes).

Propriété 30. Formule du binôme de Newton
$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,$ tel que $AB = BA$,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} A^k B^{n-k}$$

où $A^0 = I_n$.
Puis

$$A^n - B^n = (A-B)(\sum_{i=0}^{n-1} A^k\, B^{n-1-k})$$

Propriété 31. : Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, de bases respectives B, C, D, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
On a

$$Mat_{B,D}(g \circ f) = Mat_{C,D}(g) \cdot Mat_{B,C}(f)$$

Propriété 32. : Traduction matricielle d'une application linéaire.
Soient E, F deux$\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, de bases respectives B, C, $f \in \mathcal{L}(E,F)$,$x \in E$, $y \in F$, $A = Mat_{B,C}(f)$, $X = Mat_B(x)$, $Y = Mat_C(y)$.
Alors,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX$$

3.3.3 Transposition d'une matrice

Définition 20. : On appelle *transposée d'une matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice notée ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{\mathbf{p,n}}(\mathbb{K})$ où $b_{ij} = a_{ji}$.

Propriété 33. 1. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$ {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB $$

2. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

3. ${}^t({}^tA) = A$.

3.4 Matrices inversibles - Le groupe linéaire

Définition 21. Une matrice carrée A d'ordre n est dite *inversible* lorsqu'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $AB = BA = I_n$.
B est alors appelée *inverse de* A, notée A^{-1}.

Exemple : I_n est inversible d'inverse I_n.

Propriété 34. :

1. A est inversible ssi il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $AB = I_n$.
2. Une matrice A inversible d'ordre n est associée à un automorphisme f d'un $\mathbb{K}$-e.v de dim n et on a : $A^{-1} = Mat_B(f^{-1})$.
3. Soit $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.
   $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé *groupe linéaire d'ordre* n, est isomorphe au groupe linéaire de tout $\mathbb{K}$-e.v E de dimension n.
4. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$
5. $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2,\ A\,B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.
6. $\forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} ={}^t A^{-1}$.

Méthode pratique pour déterminer A^{-1} en utilisant les systèmes linéaires :
On utilise la relation $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$ de la façon suivante :

1. On écrit $AX = Y$ sous forme de système linéaire en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ puis $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
2. On exprime chaque x_i en fonction des $y_j, 1 \leq j \leq n$.
3. On écrit ce nouveau système linéaire sous forme matricielle : $X = BY$.
4. Alors $B = A^{-1}$.

Propriété 35. :
1. Une matrice diagonale A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et la matrice inverse est alors la matrice diagonale dont les coeffs diagonaux sont les inverses des coeffs diagonaux de A.
2. Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

3.5 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 22. : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est symétrique lorsque $A =^t A$ c'est-à-dire $\forall(i,j), a_{ij} = a_{ji}$.
   On note par $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
2. On dit que A est antisymétrique lorsque $A = -^tA$ c'est-à-dire $\forall(i,j), a_{ij} = -a_{ji}$.
   On note par $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Propriété 36. : $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.6 Changement de bases

3.6.1 Matrices de passage

Définition 23. : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, B et B' deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de B à B'*, notée $P_{B,B'}$ la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de B' dans la base B.

Propriété 37. : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, B, B' et B'' des bases de E.

1. $P_{B,B'} = Mat_{B',B}(Id_E)$.
2. $P_{B,B''} = P_{B,B'} \cdot P_{B',B''}$.
3. $P_{B,B'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(P_{B,B'})^{-1} = P_{B',B}$

3.6.2 Changement de bases pour un vecteur

Propriété 38. : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n, B, B' des bases de E, $x \in E$, $P = P_{B,B'}$, $X = Mat_B(x)$, $X' = Mat_{B'}(x)$.

On a la relation matricielle

$$X = P\,X'$$

3.6.3 Changement de bases pour une application linéaire

Propriété 39. : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie , B_E, B'_E des bases de E, B_F, B'_F des bases de F, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $A = Mat_{B_E,B_F}(f)$, $A' = Mat_{B'_E,B'_F}(f)$, $P = P_{B_E,B'_E}$, $Q = P_{B_F,B'_F}$.

Alors, on a la relation matricielle

$$A' = Q^{-1}\,A\,P$$

4 Rang

4.1 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 24. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v, $(v_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle *rang de* $(v_i)_{i\in I}$ la dimension de $\text{vect}((v_i)_{i\in I})$ et on note $\text{rg}((v_i)_{i\in I})$.

Propriété 40. Si $S = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E, alors $rg(S) \leq n$ et $rg(S) = n$ si et seulement si S est libre et donc une base de $\text{Vect}\,(S)$.

4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 25. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v, $(v_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E et f une application linéaire de E dans F.

Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle *rang de* f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et on note $\mathrm{rg}(f)$.

Propriété 41. : Si E est de dimension finie et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, alors $\mathrm{rg}(f)=\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{vect}\left((f(e_i)_{i\in I})\right)$.

Théorème 5. Théorème du rang : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et f une application linéaire de E dans F.

On suppose E de dimension finie.

Alors,

Tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ est isomorphe à $\mathrm{Im}f$.

Et

$$\dim_{\mathbb{K}}E = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}f + \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}f$$

Corollaire : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v **de même dimension finie** et f une application linéaire de E dans F.

f isomorphisme $\Longleftrightarrow$ f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rg}f = \dim_{\mathbb{K}}F$

4.3 Rang d'une matrice

Définition 26. : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *rang de la matrice* A et on note rg(A) le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété 42. : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour toute matrice A associée à f, on a rg(A)=rg(f)

Propriété 43. : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$
2. Si $n = p$
   A inversible ssi rg(A)=n
3. $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$ $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$.
4. $\forall P \in GL_p(\mathbb{K})$ $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$.
5. $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$. Autrement dit, le rang d'une matrice est le rang du système de ses vecteurs colonnes ainsi que celui du système de ses vecteurs lignes.

5 Déterminants

5.1 Déterminant d'une matrice carrée de taille n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 27. :

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. f est linéaire par rapport à chaque colonne de sa variable, c'est-à-dire : Pour tout $i \in \{1..n\}$, pour tous vecteurs colonnes $(C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_n)$, l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longmapsto f(A_i)$ où A_i est la matrice formée par les colonnes $(C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}, X, C_i, \cdots, C_n)$ est linéaire.
2. f est antisymétrique par rapport à chaque colonne, c'est-à-dire lorsqu'on échange deux colonnes, les images sont opposées.
3. $f(I_n)$=1

Notation : l'application f ainsi introduite est appelée **déterminant**, notée **det**.
Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
det$A$ est appelé **déterminant de** A et on le note sous forme du tableau suivant. On note aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cas où $n = 2$ et interprétation géométrique : La valeur absolue du déterminant d'ordre 2 correspond à l'aire formée par le parallélogramme obtenu à partir des deux vecteurs définis par les deux colonnes de la matrice.
Interprétation géométrique quand $n = 3$: La valeur absolue du déterminant d'ordre 3 correspond au volume formé par le parallélépipède obtenu à partir des trois vecteurs définis par les trois colonnes de la matrice.

5.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.

On se donne n vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de E. Chaque vecteur x_j a des coordonnées $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle déterminant de la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de E dans la base $\mathcal{B}$,noté $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ le déterminant de la matrice dont la j^{ime} colonne est formée par les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$.

Ainsi

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

5.3 Propriétés du déterminant

1. Si une colonne de A est nulle, son déterminant est nul.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
4. Le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales est nul.
5. On ne change pas la valeur d'un déterminant lorsqu'on ajoute, à une colonne, une combinaison linéaire des autres.
6. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

5.4 Caractérisation de l'inversibilité par les déterminants

Propriété 44. Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.
On se donne n vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de E.
$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est une base de E si et seulement si son déterminant dans la base $\mathcal{B}$ est non nul.

5.5 Déterminant d'un produit, de la transposée

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(AB) = \det A \, \det B$.
2. $\det A = \det {}^t A$.

Corollaire :

1. Deux matrices semblables ont même déterminant.
2. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis à vis des lignes que des colonnes.

5.6 Déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

Propriété 45. Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n, alors $\det u$ est le déterminant de n'importe quelle matrice représentant u dans une base de E.

Propriété 46. u est un automorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension finie n si et seulement si $\det u \neq 0$.

5.7 Développement par rapport à une ligne ou colonne

Notations : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On note la matrice $N_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en lui supprimant ses $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne.

Propriété 47. 1. $\forall j \in [1..n], \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det N_{ij}$

On dit qu'on a développé le déterminant de A par rapport à sa $j^{\text{ième}}$ *colonne.*

2. $\forall i \in [1..n], \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det N_{ij}$

On dit qu'on a développé le déterminant de A par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ *ligne.*