1. Étude énergétique

1. L'expression de l'énergie cinétique est $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ d'où $\boxed{E_C=\frac{1}{2}m\,A^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)}$. L'expression de l'énergie potentielle est $E_p=\frac{1}{2}kx^2$ d'où $\boxed{E_p=\frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega_0 t)}$

2.

a) $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$ donc $T_0\omega_0=2\pi$ d'où $\boxed{E_C=\frac{1}{2}m\,A^2\omega_0^2\sin^2(0,27\times 2\pi)}$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Application numérique : $E_C=\frac{1}{2}0,05\times 0,2^2\times\frac{32}{0,05}\sin^2(0,27\times 2\pi)$ d'où $\boxed{E_C=0,63\,J}$

$\boxed{E_p=\frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(0,27\times 2\pi)}$ d'où $E_p=\frac{1}{2}\times 32\times 0,2^2\cos^2(0,27\times 2\pi)$ d'où $\boxed{E_p=0,01\,J}$

b) $x_1=\frac{A}{2}=A\cos(\omega_0 t_1)$ donc $\cos(\omega_0 t_1)=\frac{1}{2}$ or $\cos^2(\omega_0 t_1)+\sin^2(\omega_0 t_1)=1$ donc $\sin^2(\omega_0 t_1)=1-\cos^2(\omega_0 t_1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ d'où $E_C=\frac{1}{2}\times 0,2^2\times 32\times\frac{3}{4}$ d'où $\boxed{E_C=0,48\,J}$

d'où $E_p=\frac{1}{2}\times 32\times 0,2^2\times\frac{1}{4}$ d'où $\boxed{E_p=0,16\,J}$

Rem : dans les 2 cas $E_c+E_p=0,64\,J$ on peut aussi calculer $E_p=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2$ bcq + rapide et utiliser la conservation de l'énergie.

3. $E_c=E_p$ si $\cos^2(\omega_0 t)=\sin^2(\omega_0 t)$ cad $\tan(\omega_0 t)=\pm 1$

d'où $(\omega_0 t_n)=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$ soit $t_n=\frac{\pi}{4\omega_0}+n\frac{\pi}{2\omega_0}$ soit $\boxed{t_n=\frac{T_0}{8}+n\frac{T_0}{4}}$ avec n un entier.

2. Oscillations dans un cristal :

1. Lorsque la vitesse est maximale l'énergie potentielle est nulle ainsi $E_m=\frac{1}{2}m v_{max}^2$. Quand l'allongement est maximal égal à X_m l'énergie cinétique est nulle ainsi $E_m=\frac{1}{2}k X_m^2$. Au cours du temps, il y a conservation de l'énergie mécanique donc $\frac{1}{2}m v_{max}^2=\frac{1}{2}k X_m^2$ d'où $v_{max}=\sqrt{\frac{k}{m}}X_m=\omega_0 X_m$ or $\omega_0=2\pi f_0$ donc

$\boxed{v_{max}=2\pi f_0 X_m}$.

Application numérique : $\boxed{v_{max}=2\pi\times10^{12}\times0{,}05.10^{-9}=314\,m.s^{-1}}$

2. $E_m=\frac{1}{2}m v_{max}^2=\frac{1}{2}m(2\pi f_0 X_m)^2$ donc $\boxed{E_m=2m(\pi f_0 X_m)^2}$

Application numérique : $\boxed{E_m=2\times10^{-26}\times(\pi\times10^{12}\times0{,}05.10^{-9})^2=4{,}93.10^{-22}J}$

3. l'accélération $a(t)=-\omega_0^2 x(t)$ donc son module est maximum quand *x(t)* est maximum donc

$\boxed{a_{max}=\omega_0^2 X_m=4\pi^2 f_0^2 X_m}$

Application numérique : $\boxed{a_{max}=4\pi^2 10^{24}\times0{,}05.10^{-9}=1{,}97.10^{15}m.s^{-2}}$

4. $\boxed{k=m\,\omega_0^2=m\,4\pi^2 f_0^2}$

Application numérique : $\boxed{k=10^{-26}4\pi^2 10^{24}=0{,}395\,N.m^{-1}}$

3. Ajout d'une masse

1. Au moment où on ajoute la masse $\frac{m}{2}$ sur le chariot, l'ensemble a une vitesse nulle, l'énergie cinétique du chariot est nulle. L'énergie du nouveau système oscillant est sous forme d'énergie potentielle : $E_m=\frac{1}{2}k A^2$ elle est indépendante de la masse donc l'énergie mécanique du chariot chargé n'a pas varié. L'amplitude du mouvement ne varie pas non plus.

2. $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Avant ajout de $\frac{m}{2}$. Après ajout de $\frac{m}{2}$ $T_0'=2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}=\sqrt{\frac{3}{2}}T_0$ donc $\boxed{T_0'=\sqrt{\frac{3}{2}}T_0}$

3. Avant ajout de la masse $\frac{m}{2}$ .lorsque la vitesse est maximale *(passage par la position d'équilibre)* l'énergie potentielle est nulle ainsi $E_m=\frac{1}{2}m v_{max}^2$. Au cours du temps, il y a conservation de l'énergie mécanique donc $\frac{1}{2}m v_{max}^2=\frac{1}{2}k A^2$ d'où $v_{max}=\sqrt{\frac{k}{m}}A$. Après ajout de la masse $\frac{m}{2}$ le raisonnement est le même $v_{max}'=\sqrt{\frac{2k}{3m}}A$ donc $\boxed{v_{max}'=\sqrt{\frac{2}{3}}v_{max}}$