Problème pour s'entraîner : Autour de l'oscillateur harmonique

Le modèle de l'oscillateur harmonique permet la description de phénomènes très variés ayant en commun une évolution périodique d'une grandeur physique autour d'un état d'équilibre du système.

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes.

Outils mathématiques : $cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$

Energie potentielle élastique d'une masse attachée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k : $\boldsymbol{E_p = \frac{1}{2}\, k(l - l_0)^2}$

Introduction du modèle :

Un solide de masse m = 100 g et de centre d'inertie G peut coulisser **sans frottement** le long d'une tige horizontale. Ce solide est accroché à l'extrémité d'un ressort linéaire sans masse, l'autre extrémité du ressort étant fixée. Le ressort a une constante de raideur k = 10 N.m^{-1}. La direction horizontale est repérée par un axe (Ox) de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$.

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide occupe la position O d'abscisse $x = 0$. On écarte le solide de sa position d'équilibre et on le lance. Il effectue un mouvement de translation sinusoïdale de part et d'autre de sa position d'équilibre. Le déplacement du centre d'inertie en fonction du temps est : $\overrightarrow{OG} = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$.

A l'instant t = 0 choisi comme origine des temps, son abscisse est $x_0 = +2{,}0$ cm et sa vitesse vaut $v_0 = -0{,}20$ m.s^{-1}.

On donne la pulsation propre des oscillations : $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$

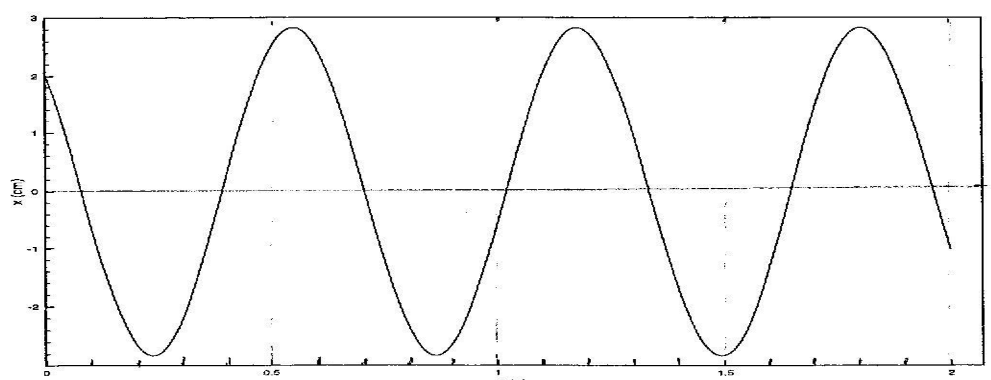
1 – Déterminer les valeurs numériques de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur, de sa fréquence propre f_0 et de sa période propre T_0.

2 – L'équation horaire du mouvement est $\boldsymbol{x(t)= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$. Déterminer les constantes A et B dans les conditions de lâcher décrites en fonction de ω_0, x_0 et v_0 .

3 – On peut également écrire l'équation horaire sous la forme : $\boldsymbol{x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$**.** Reprendre les conditions du lâcher afin de déterminer les expressions de l'amplitude du mouvement X_m et la phase à l'origine φ en fonction de ω_0, x_0 et v_0. Les calculer. On précise que $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

4 – Donner les valeurs numériques de la position x_1 et de la vitesse v_1 à l'instant $t_1 = 0{,}60$s.

5 – Exploitation d'un oscillogramme : L'enregistrement du mouvement de cet oscillateur harmonique a été relevé ci-dessous. Déterminer graphiquement, en expliquant la méthode, l'amplitude, la période, la fréquence, la pulsation et la phase à l'origine des temps du signal.



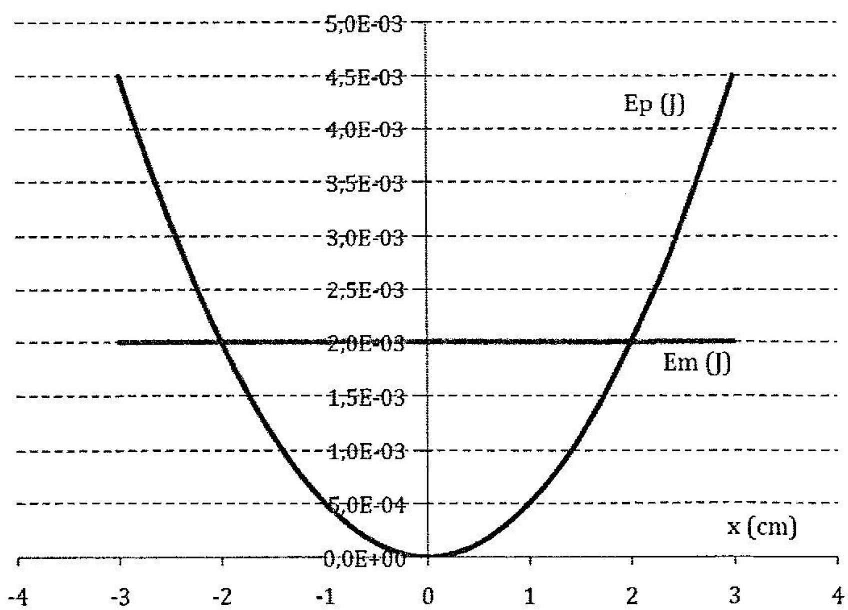
Approche énergétique :

Le système est identique à celui présenté précédemment, mais il est lancé avec des conditions initiales différentes.

6 – Le solide étudié oscille maintenant avec une amplitude $X_m = 5{,}0$ cm. Quelle est la propriété de l'énergie mécanique ? Définir, puis exprimer l'énergie mécanique E_m du solide en fonction de k et X_m uniquement. La calculer dans ce cas. En déduire la valeur de la vitesse maximale V_{max} du solide.

7 – Exploitations graphiques avec **des conditions initiales différentes de celles de la question 6** :

La figure ci-contre présente l'énergie potentielle (en forme de cuvette) et l'énergie mécanique constante en fonction de l'abscisse x du solide.



7.a – Un seul domaine de la courbe ci-contre est acceptable physiquement. Indiquer lequel en justifiant votre raisonnement. En déduire l'amplitude du mouvement dans ce cas de figure. Expliquer.

7.b – Déduire du graphe, la valeur de la constante de raideur k du ressort. Expliquer.

7.c – Donner les valeurs de l'énergie cinétique pour $x = 0$ et pour $x = -2$ cm.

7.d – La période des oscillations vaut $T_0 = 0{,}628$ s. Déterminer alors l'expression de la vitesse du solide notée v_2, lorsque l'élongation vaut $x_2 = 1{,}0$ cm en fonction de T_0, x_2 et X_m. Puis la calculer.

Solution :

Introduction du modèle :

1 – **Pulsation propre** : $\boxed{\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}}$; AN : $\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = \sqrt{100}$; On trouve $\boldsymbol{\omega_0} = \mathbf{10\ rad.s^{-1}}$.

- **Fréquence propre** f_0 tq : $\omega_0 = 2\pi\, f_0$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{f_0} = \frac{\boldsymbol{\omega_0}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}}$; AN : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}1}}$; $\boldsymbol{f_0} = \mathbf{1{,}6\ Hz}$.
- **Période propre** T_0 : $\boxed{\boldsymbol{T_0} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{k}}}}$; AN : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1}{10}}$; On trouve : $\boldsymbol{T_0} = \mathbf{0{,}63\ s}$.

2 - La solution est de la forme **:** $\boxed{\boldsymbol{x(t)} = \mathbf{A\cos(}\boldsymbol{\omega_0 t}\mathbf{)} + \boldsymbol{B\sin(\omega_0 t)}}$.

1^er CI : A t = 0, $x(0) = x_0$; D'où : $x(0) = A = x_0$; Ainsi : $\boldsymbol{A = x_0}$.
2^ème CI : A t = 0, $\dot{x}(0) = v_0$; Or : $\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$.
D'où : $\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0$; Ainsi : $\boldsymbol{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$.

Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}}$.

3 – On cherche l'amplitude et la phase à l'origine. $\boldsymbol{x(t) = X_m\cos(\ \omega_0 t + \varphi)}$. Ou encore : $x(t) = X_m\cos(\ \omega_0 t)\cos\varphi - X_m\sin(\ \omega_0 t)\sin\varphi$

Par identification, il vient : $\boldsymbol{x_0 = X_m\cos\varphi}$ et $\boldsymbol{-\frac{v_0}{\omega_0} = X_m\sin\varphi}$.

On en déduit l'amplitude des oscillations : $X_m^2 = {x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{X_m = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}}$.

et la phase à l'origine telle que $\boxed{\boldsymbol{\tan\varphi = -\frac{v_0}{x_0\,\omega_0}}}$ avec $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ d'après l'énoncé.

Application numérique :

$X_m = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{0{,}02^2 + \frac{0{,}04}{100}} = 0{,}028$; Ainsi : $\boldsymbol{X_m \approx 0{,}028\ \mathbf{m} \approx 2{,}8\ \mathbf{cm}}$.

Et $\boxed{\varphi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\,\omega_0} = -\arctan\frac{-0{,}2}{0{,}02\times 10} = \arctan(1)}$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{4}}}$.

4 – A $t_1 = 0{,}60\text{s}$: $x_1 = 0{,}02\cos(10\times 0{,}6) - \frac{0{,}2}{10}\sin(10\times 0{,}6)$;

On trouve $\boldsymbol{x_1 \approx 0{,}024\ \mathbf{m} = 2{,}4\ \mathbf{cm}}$.

- Et $\boxed{\boldsymbol{v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\omega_0\sin(\ \omega_0 t) + v_0\cos(\ \omega_0 t)}}$;

AN : $v_1 = -0{,}02\times 10\sin(10\times 0{,}6) - 0{,}2\cos(10\times 0{,}6)$; On trouve : $\boldsymbol{v_1} = \mathbf{-\ 0{,}14\ m.s^{-1}}$.

5 – On lit $\boldsymbol{X_m \approx 2{,}8\ \mathbf{cm}}$.(max)

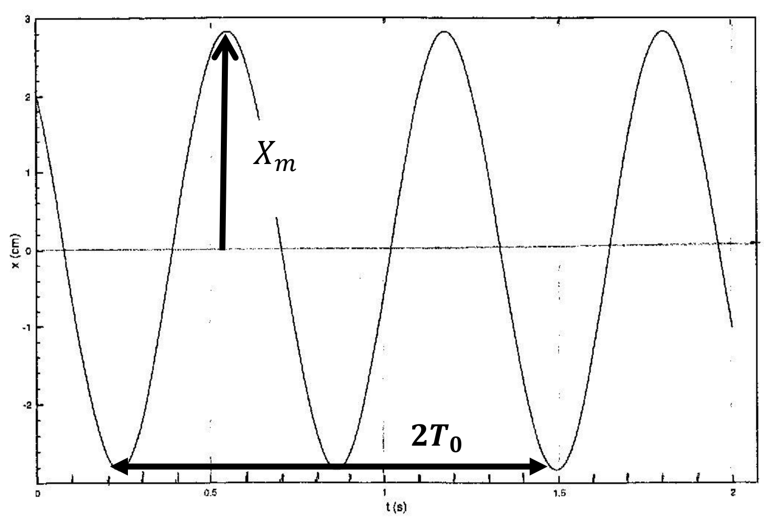
- 2 $T_0 \approx$ 1,5- 0,2 = 1,3 s ; Soit $\mathbf{T_0 \approx 0{,}65\ s}$.
- $f_0 = \frac{1}{T_0}$; $\boldsymbol{f_0 \approx 1{,}5\ \mathbf{Hz}}$.
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; $\boldsymbol{\omega_0 \approx 9{,}7\ \mathbf{rad.s^{-1}}}$.
- Pour mesurer φ : On prend $x(t)$ sous la forme $\boldsymbol{x(t) = X_m\cos(\ \omega_0 t + \varphi)}$.

A t = 0, $\boxed{\boldsymbol{x(0) = X_m\cos(\varphi)}}$ = 2,8 cos(φ) ≈ 2

D'où : $\cos(\varphi) \approx \frac{2}{2{,}8} \approx 0{,}7 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$;

Ainsi $\boxed{\boldsymbol{\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}78 \approx \frac{\pi}{4}}}$;

car $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ d'après l'énoncé.



Approche énergétique du modèle horizontal présenté en I :

6 – L'énergie mécanique est constante, car il n'y a pas de frottement.

De plus, on sait que $\boxed{\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}}$;

Or quand l'élongation est maximale, la vitesse est nulle, alors $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}k{X_m}^2}}$;

AN : $E_m = \frac{1}{2} \times 10 \times 0{,}05^2$; On trouve $\boldsymbol{E_m \approx 1{,}2.10^{-2}}$ **J**.

- Quand la vitesse est maximale, l'élongation est nulle, alors $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m{V_{max}}^2}}$;

Soit : $\boxed{\boldsymbol{V_{max} = \sqrt{\frac{2\,E_m}{m}}}\ ;}$ AN : $V_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}2.10^{-2}}{0{,}1}}$; On trouve $\boldsymbol{V_{max} \approx 4{,}9.10^{-1}}$ **m.s⁻¹**.

7 – Exploitations graphiques avec **des conditions initiales différentes de celles de la question 6** :

7.a – La seule partie du graphe exploitable est celle où $\boxed{\boldsymbol{E_m \ \geq\ E_p}}$, car $E_m = E_c + E_p$ et $E_c \geq 0$; cela correspond donc **au bas de la cuvette**, tel que $\boxed{\boldsymbol{x \in [\,-2\ ;\ +2\ \text{cm}]}}$.
Ainsi, on lit $\boldsymbol{X_m \approx 2}$ **cm,** car à la limite $E_m = E_p$ et alors $E_c = 0$ avec $x = X_m$.

7.b – De nouveau, quand l'élongation est maximale, la vitesse est nulle, alors $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}k{X_m}^2}}$;

D'où $\boxed{\boldsymbol{k = \frac{2\,E_m}{{X_m}^2}}}$; AN : $k = \frac{2 \times 2.10^{-3}}{0{,}02^2}$; On trouve : $\boldsymbol{k = 10}$ **N.m⁻¹**.

7.c – Quand $x = 0$, l'élongation est nulle donc $E_p = 0$; Alors $\boxed{\boldsymbol{E_m = E_c}}$; On lit $\boldsymbol{E_m = E_c = 2.10^{-3}}$ **J**.

- Quand $x = -2$ cm, l'élongation est minimale et la vitesse est nulle , donc $\boldsymbol{E_c = 0}$.

7.d – On a $T_0 = 0{,}628$ s et $x_2 = 1$ cm à l'instant noté t_2.
De plus, $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$;
Ainsi $x_2 = X_m \cos(\omega_0\, t_2 + \varphi)$; D'où : $\cos(\omega_0\, t_2 + \varphi) = \frac{x_2}{X_m}$.

- D'autre part, $v(t) = \dot{x}(t) = -\,X_m\,\omega_0\,\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = -\,X_m\,\omega_0\,\sqrt{1 - cos^2(\,\omega_0 t + \varphi)}$

Ainsi $v_2 = -\,X_m\,\omega_0\,\sqrt{1 - cos^2(\,\omega_0\ t_2 + \varphi)} = -X_m\,\omega_0\,\sqrt{1 - (\frac{x_2}{X_m})^2}$; Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{v_2 = -\,\frac{2\pi}{T_0}\,\sqrt{{X_m}^2 - x_2^2}}}$;

AN : $v_2 = -\,\frac{2\pi}{0{,}628}\,\sqrt{0{,}02^2 - 0{,}01^2}$; On trouve : $\boldsymbol{v_2 = -1{,}7.10^{-1}}$ **m.s⁻¹**.