Correction exercice 3

Circuit résonant parallèle

3. Circuit résonnant parallèle (3)

1) $u = u_R = u_C = u_L$ soit $R i_R = \frac{1}{C}\int i_C dt = L \frac{di_L}{dt}$

$(r) \Rightarrow i_R = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}$ et $i_C = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$

On écrit la loi des nœuds $\Rightarrow i_L + i_R + i_C = 0 \Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = 0$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0}$$

Rem :
(La résistance critique d'un circuit RLC a pour expression : $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow Q = \frac{2R}{R_c}$
Rem : dire que R est très grande par rapport à la résistance critique revient à dire $Q \gg 1$)

2) $q = C u_C = C u_L = LC\frac{di_L}{dt} \Rightarrow$ En dérivant l'équation différentielle précédente, nous obtenons la m équation différentielle pour q.

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

3) Soit $x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0$ $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$ or $Q \gg 1$

Léri $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-\omega_0}{2Q} + j\omega$ et $x_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} - j\omega$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\ldots} \simeq \omega_0$.

$\Rightarrow i_L = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[I_a \cos\omega_0 t + I_b \sin\omega_0 t\right]$

Les conditions initiales imposent $i_L(0) = I_a = 0$ et $q(0) = C u_0 \Rightarrow$

$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{u_0}{L} = I_b\omega$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{u_0}{\omega_0 L} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin\omega_0 t = u_0\sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin\omega_0 t$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = u_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{2Q}\sin\omega_0 t\right] \simeq u_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\cos\omega_0 t$$

3.3 Pour $Q \gg 1$

$$\left.\begin{aligned} E_L(t) &= \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\sin^2\omega_0 t \\ E_C(t) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{q^2}{C} = \tfrac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\omega_0 t/Q}\cos^2\omega_0 t \end{aligned}\right\} E_{TOT} = E_C + E_L = \tfrac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\omega_0 t/Q}$$