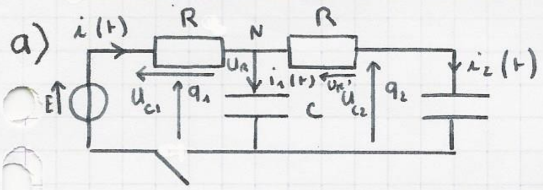
Correction exercice 4

Mise en cascade de deux cellules RC

Mise en cascade d'une cellule RC.

a)



1) Pour $t = 0^+$ $q_1(0^+) = q_2(0^+) = 0$ de part la continuité de la charge dans les condensateurs $\Rightarrow u_{c1}(0^+) = u_{c2}(0^+) = 0$

$\Rightarrow u_R(0^+) = R\,i(0^+) = E \Rightarrow \boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$

$u'_R(0^+) = u_{c1}(0^+) - u_{c2}(0^+) = R\,i_2(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{i_2(0^+) = 0}$

D'après la loi des noeuds en N : $\boxed{i_1(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}}$ Rem : on peut également considérer les condensateurs $\Leftrightarrow$ à des fils.

Pour $t\,\infty$: les deux condensateurs sont $\Leftrightarrow$ à des interrupteurs ouverts $\Rightarrow$

$\boxed{i_2(\infty) = 0\ ;\ i_1(\infty) = 0\ ;\ i(\infty) = 0}$

b) $i_1 = C\frac{du_{c1}}{dt}$ et $u_{c1} = u_R' + u_{c2} \Rightarrow C\frac{du_{c1}}{dt} = C\frac{du_R'}{dt} + C\frac{du_{c2}}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{i_1 = RC\frac{di_2}{dt} + i_2}$

$E = Ri + Ri_2 + u_{c2} \Rightarrow i = \frac{E - Ri_2 - u_{c2}}{R} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{R}\underbrace{\frac{du_{c2}}{dt}}_{\frac{i_2}{C}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC}i_2}$

On écrit la loi des noeuds $i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$\Rightarrow -\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{RC}i_2 = RC\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$\Rightarrow RC\frac{d^2i_2}{dt^2} + 3\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{RC} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{R^2C^2} = 0}$

c) On associe l'équation caractéristique : $x^2 + \frac{3}{RC}x + \frac{1}{R^2C^2} = 0$

$\Delta = \frac{9}{R^2C^2} - \frac{4}{R^2C^2} = \frac{5}{R^2C^2} > 0$

$x_1 = -\frac{3}{2RC} - \frac{\sqrt{5}}{2RC}$

$x_2 = -\frac{3}{2RC} + \frac{\sqrt{5}}{2RC}$

$i_2(t) = A\,e^{-\frac{t}{2RC}(3+\sqrt{5})} + B\,e^{-t/2RC\,(3-\sqrt{5})}$

Détermination de A et B :

A $t=0$ $i_2(0^+) = 0^+ \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$

A $t=0$ $i_1(0^+) = RC\left.\frac{di_2}{dt}\right)_0 + i_2(0^+)$

$\Rightarrow \left.\frac{di_2}{dt}\right)_{0^+} = \frac{E}{R^2C}$

On calcule $\left.\frac{di_2}{dt}\right)_0 \overset{1}{=} \frac{-A(3+\sqrt{5})}{2RC}\times e^0 + \frac{A(3-\sqrt{5})}{2RC}\times e^0$ $\qquad i_2(0) = 0$ 1

(1) $\Rightarrow \frac{E}{\cancel{R}} = -\frac{\cancel{2}A\sqrt{5}}{\cancel{2}\cancel{R}\cancel{C}}\times R\cancel{C} \Rightarrow A \overset{1}{=} -\frac{E}{\sqrt{5}R}$ et $B = \frac{E}{\sqrt{5}R}$ 1

$\Rightarrow i_2(t) = \frac{E}{R\sqrt{5}}\left[e^{\frac{-t}{2RC}(3-\sqrt{5})} - e^{\frac{-t}{2RC}(3+\sqrt{5})}\right]$ 1

---

d) $\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t_M} \overset{1}{=} 0$ après calcul : $t_M = \frac{RC}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \simeq 0{,}86\,RC$ 2

$\boxed{i_2(t_M) = 0{,}27\,\frac{E}{R}}$ 1