SEQUENCE II

Modélisation des systèmes asservis

Objectifs :
- ✓ *Définir les performances d'un système*
- ✓ *Modéliser un système par sa fonction de transfert*
- ✓ *Modéliser un système par son schéma-bloc*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 2 – Chap. 3

Chapitre 3

Cours

Modéliser un SLCI par un schéma-bloc

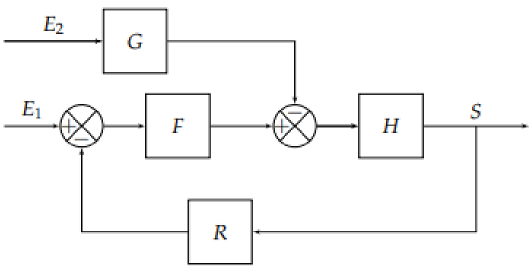
Prérequis
- ✓ *Séquence I*
- ✓ *Séquence II – Chapitre II*

Objectifs
- ✓ *Modéliser un système par son schéma-bloc*
- ✓ *Simplifier un schéma-bloc*

Savoir-faire associés

M. II. 4.

PLAN DU CHAPITRE



Exemple de schéma-blocs

Les systèmes linéaires continus sont souvent représentés par des **schémas fonctionnels** (schémas blocs). Le **système d'équations est remplacé par un ensemble de blocs** représentant les **fonctions du système**.

I. Les schéma-blocs

Nous avons vu qu'un système complexe pouvait être décrit par un schéma fonctionnel dans lequel les **noms des constituants** apparaissaient dans des **blocs**. Maintenant, nous savons calculer la **fonction de transfert** de chacun des **blocs** et nous pouvons construire un **schéma-blocs** en remplaçant le nom des composants par leur fonction de transfert.

A. Lien avec la chaîne fonctionnelle

Un schéma-blocs est construit en s'inspirant directement de la **chaine fonctionnelle** du système mais en ne **conservant que les composants intervenant directement dans l'asservissement** et en choisissant les grandeurs contrôlées (flux ou effort) dans la chaîne d'énergie. On supposera les conditions d'Heaviside vérifiées (conditions initiales nulles).

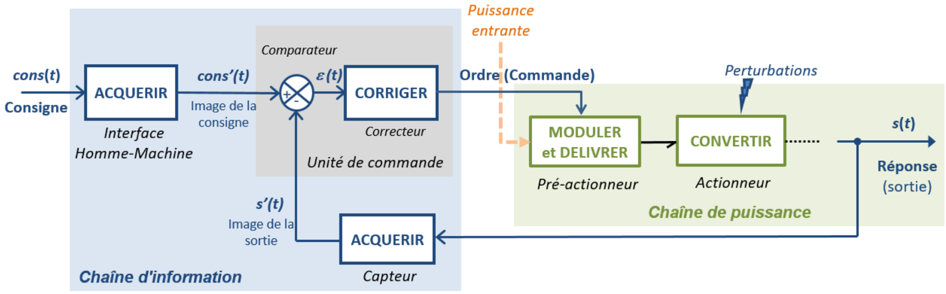
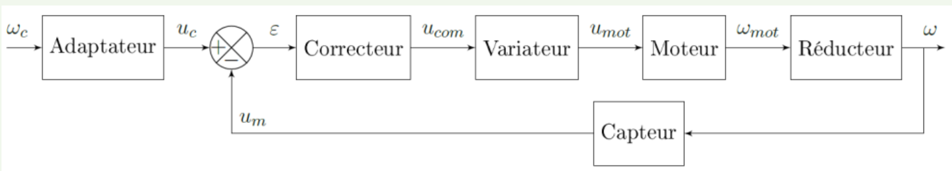


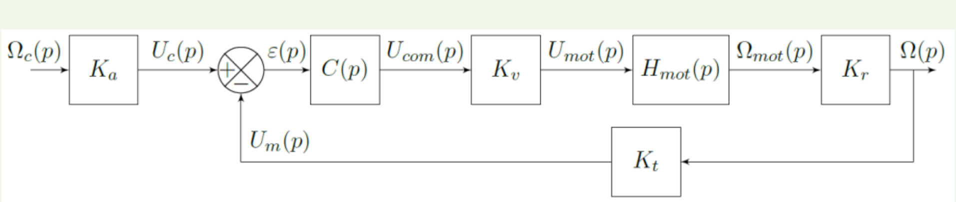
Figure 1 : *chaine fonctionnelle d'un bras de robot*

Sur la Figure 1, on remarque que **l'entrée du pré-actionneur** qui va nous intéresser pour étudier l'asservissement de la grandeur de sortie est **l'ordre issu de l'unité de commande** et non pas la puissance entrante (en pointillé sur le schéma) que l'on retrouve dans la représentation chaîne de puissance/chaîne d'information.

Exemple 1 : Description de l'asservissement en vitesse d'un bras de robot

« Une consigne de vitesse angulaire de rotation ω_c [rad. s^{-1}] est adaptée à l'aide d'un adaptateur de gain K_a en une tension de consigne u_c [V]. Cette tension de consigne est comparée à la tension u_m [V] délivrée par le capteur de type génératrice tachymétrique de gain K_t, proportionnelle à la vitesse angulaire réelle ω [rad. s^{-1}]. L'écart de tension δu [V] est corrigé par un correcteur, représenté par sa fonction de transfert $C(p) = C$, qui fournit la tension de commande u_{com} [V] au variateur de gain K_v pilotant le moteur par une tension u_{mot} [V]. Le moteur, dont la fonction de transfert est notée $H_{mot}(p)$ transforme cette tension en vitesse de rotation ω_{mot} [rad. s^{-1}], puis cette vitesse est réduite par un réducteur de gain K_r pour obtenir la vitesse angulaire de sortie ω [rad. s^{-1}]. »





B.Structure du schéma-blocs

Dans le but de pouvoir déterminer plus facilement la **fonction de transfert globale** du système, la **représentation schéma-blocs**, en plus de s'appuyer sur la structure chaîne de puissance/ chaîne d'information, met en évidence le **modèle** (dans le domaine de Laplace) de chacun des constituants intervenant dans l'**asservissement**. Dans le cas général, la **représentation d'un asservissement** par **schéma-blocs** est la suivante (Figure 2) :

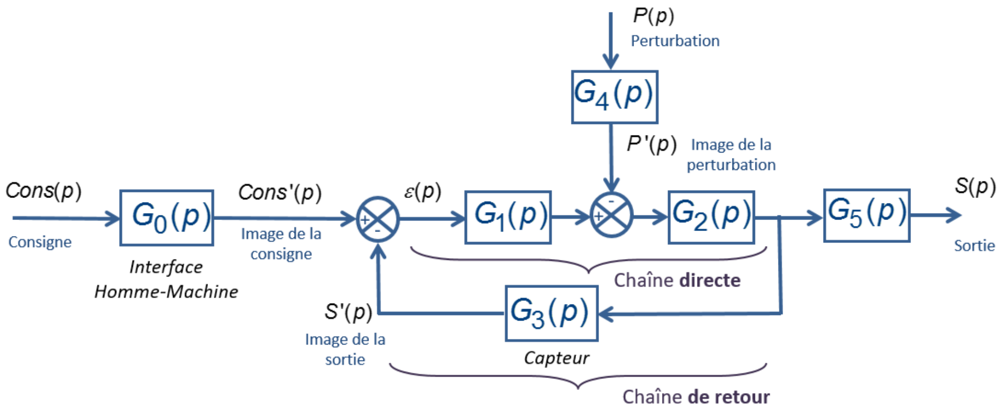


Figure 2 : *exemple de schéma-blocs*

Les trois éléments de base du schéma-blocs sont :

- **Le bloc, Figure 3 :** il représente un **constituant du système asservi** (interface H/M, capteur, actionneur, ...) et contient une **équation mathématique** liant deux grandeurs. Il comporte une seule entrée et une seule sortie.

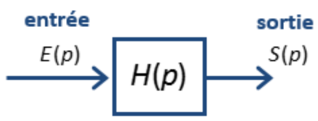
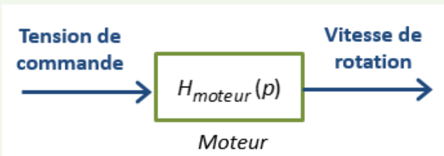


Figure 3 : *un bloc*

Exemple 2 : un moteur électrique peut être vu comme un bloc avec une tension de commande en entrée et une vitesse de rotation en sortie.



- **Le point de prélèvement, ou jonction, Figure 4 :** il prélève, sans le modifier, le signal en un point.

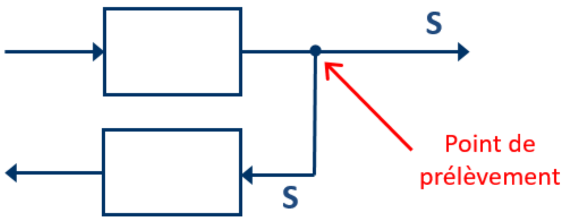


Figure 4 : *un point de prélèvement*

- **Le comparateur (soustracteur ou sommateur), Figure 5 :** il comporte plusieurs entrées mais une seule sortie. Ces entrées peuvent être **additionnées ou soustraites**.

Figure 5 : *un comparateur*

Un système asservi est constitué de deux chaînes (Figure 2) : la **chaine directe** et la **chaine de retour.**

> **Définition 1 – la chaine directe :** La chaîne directe, entre le premier comparateur et le point de prélèvement du capteur, assure les fonctions de commande.

> **Définition 2 – la chaine de retour :** La chaîne de retour, entre le point de prélèvement du capteur et le premier comparateur, qui assure la fonction de mesure du signal de sortie.

Dans le modèle d'un système asservi, la **perturbation** est généralement **une entrée qui vient modifier la chaîne directe** au travers d'un comparateur. La mesure de la sortie (point de prélèvement entre $G_2(p)$ et $G_5(p)$, Figure 2) est souvent réalisée au travers d'une grandeur intermédiaire et non pas directement sur $S(p)$.

II. Schéma-blocs et fonction de transfert

Pour étudier ou prévoir le comportement d'un SLCI asservi, il est nécessaire de connaître sa fonction de transfert globale. Celle-ci est obtenue à partir des différentes fonctions de transfert de chacun de ses constituants. Il est donc indispensable de connaître les règles d'association et de simplification des schémas-blocs.

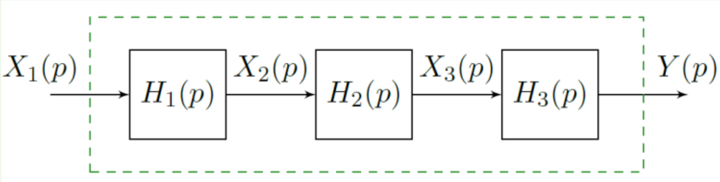
A. Association de blocs

1. Association de blocs en série

Les schéma-blocs présentent souvent des blocs en série que l'on peut réduire dans le cadre du calcul de la fonction de transfert globale du système.

<u>Propriété 1 :</u> La fonction de transfert équivalente à l'association **en série** de plusieurs blocs est **égale au produit des fonctions de transfert** de ces blocs.

<u>Exemple 3 :</u> calculer la fonction de transfert équivalente du schéma-blocs suivant.



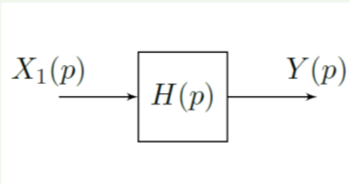
$$\begin{cases} \boldsymbol{X_2(p) = H_1(p) \cdot X_1(p)} \\ \boldsymbol{X_3(p) = H_2(p) \cdot X_2(p)} \\ \boldsymbol{Y(p) = H_3(p) \cdot X_3(p)} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{Y(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot X_1(p)}$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc :

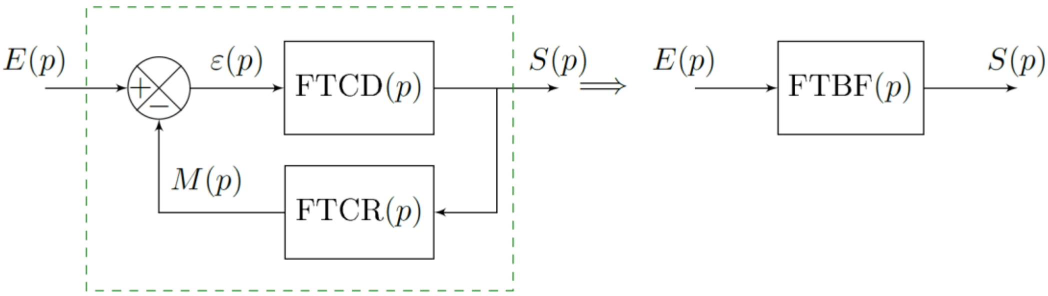
$$\boldsymbol{H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}$$



2. Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-blocs avec rétroaction, Figure 6. Pour étudier les performances de ces systèmes, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale. Celle-ci est appelée fonction de transfert en boucle fermée, Figure 6 :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$



<u>Figure 6 :</u> *le schéma-blocs d'un système en boucle fermée*

<u>Propriété 2 – Formule de Black :</u> Dans le cas d'un système mis sous la forme de la Figure 6, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p) \cdot FTCR(p)}$$

Démonstration :

Calcul analytique de la fonction de transfert globale FTBF(p) :

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = E(p) - M(p) = E(p) - FTCR(p) \cdot S(p) \\ S(p) = FTCD(p) \cdot \varepsilon(p) \end{cases}$$

On a donc :

$$S(p) = FTCD(p) \cdot [E(p) - FTCR(p) \cdot S(p)]$$

Soit :

$$S(p) \cdot [1 + FTCD(p) \cdot FTCR(p)] = FTCD(p) \cdot E(p)$$

3. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé, Figure 7. Elle comprend la chaîne directe (FTCD) et la chaîne de retour (FTCR). On a alors :

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = FTCD(p) \cdot FTCR(p)$$

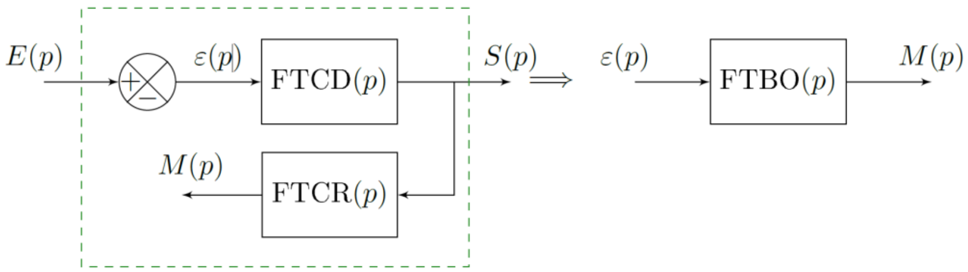


Figure 7 : *le schéma-blocs d'un système en boucle ouverte*

Propriété 3 : La formule de Black donne la relation suivante entre FTBO et FTBF :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

La FTBO est utilisée pour déterminer rapidement les performances de stabilité et de précision d'un système. Elle est donc essentielle pour l'analyse des systèmes complexes.

Exemple 4 : On cherche à déterminer la fonction de transfert globale du bras de robot de l'exemple 1 :

- ***Méthode par réduction :***

Le schéma-bloc de la Figure 7 présente un bloc en série avec une boucle. En appliquant la formule de Black, la fonction de transfert de la boucle est :

$$\frac{\Omega(p)}{U_c(p)} = \frac{C(p) \cdot K_v \cdot H_{mot}(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot K_v \cdot H_{mot}(p) \cdot K_r \cdot K_t}$$

La fonction de transfert globale est donc :

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = K_a \cdot \frac{C(p) \cdot K_v \cdot H_{mot}(p) \cdot K_r}{1 + C(p) \cdot K_v \cdot H_{mot}(p) \cdot K_r \cdot K_t}$$

- ***Méthode analytique :***

On a directement :

$$\Omega(p) = C(p) \cdot K_v \cdot H_{mot}(p) \cdot K_r \cdot [K_a \cdot \Omega_c(p) - K_t \cdot \Omega(p)]$$

Donc :

$$\Omega(p)\cdot[1+K_t\cdot C(p)\cdot K_v\cdot H_{mot}(p)\cdot K_r]=C(p)\cdot K_v\cdot H_{mot}(p)\cdot K_r\cdot K_a\cdot \Omega_c(p)$$

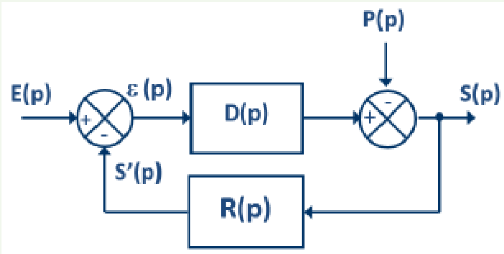
D'où :

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)}=K_a\cdot\frac{C(p)\cdot K_v\cdot H_{mot}(p)\cdot K_r}{1+C(p)\cdot K_v\cdot H_{mot}(p)\cdot K_r\cdot K_t}$$

B. Système à plusieurs entrées

Propriété 4 – Théorème de superposition : La sortie d'un système à plusieurs entrées est obtenue en additionnant toutes les réponses élémentaires. Une réponse élémentaire est obtenue en n'ayant qu'une seule entrée non nulle. C'est une conséquence directe de la linéarité du modèle.

Exemple 5 : Déterminer la fonction de transfert du schéma-blocs suivant :



On pose :

$$\left.\frac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}=H_1(p)$$

Et :

$$\left.\frac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}=H_2(p)$$

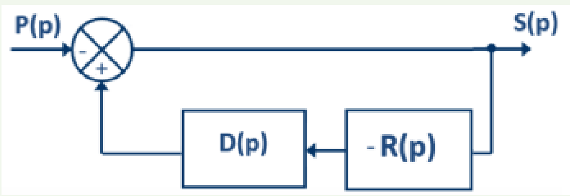
- ***Calcul de $H_1(p)$, pour $P(p)=0$:***

En appliquant la formule de Black, la fonction de transfert est :

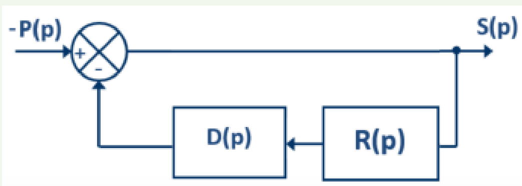
$$H_1(p)=\frac{D(p)}{1+D(p)\cdot R(p)}$$

- ***Calcul de $H_2(p)$, pour $E(p)=0$:***

Le schéma-blocs devient :



Soit :



En appliquant la formule de Black, la fonction de transfert est :

$$H_2(p)=\frac{-1}{1+D(p)\cdot R(p)}$$

C. Déplacement des points de jonction et des sommateurs

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. Les figures suivantes montrent quelques schémas équivalents. L'inconvénient à modifier la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

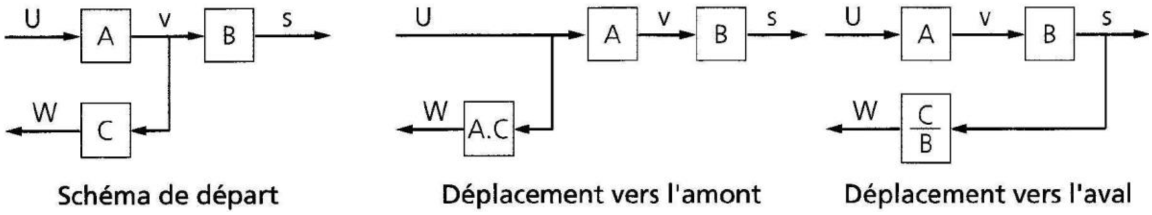


Figure 8 : *Déplacement vers l'amont ou l'aval des blocs*

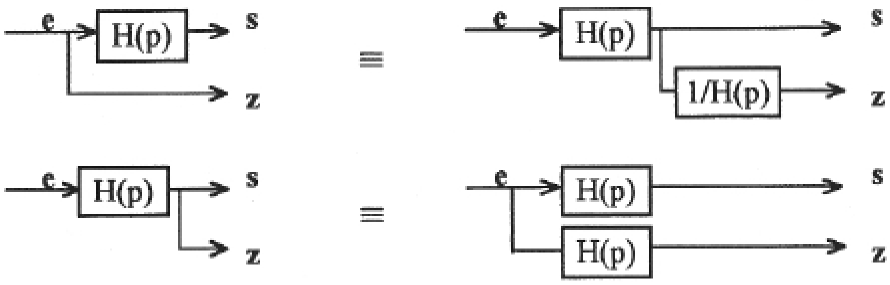


Figure 9 : *déplacement du point de prélèvement*

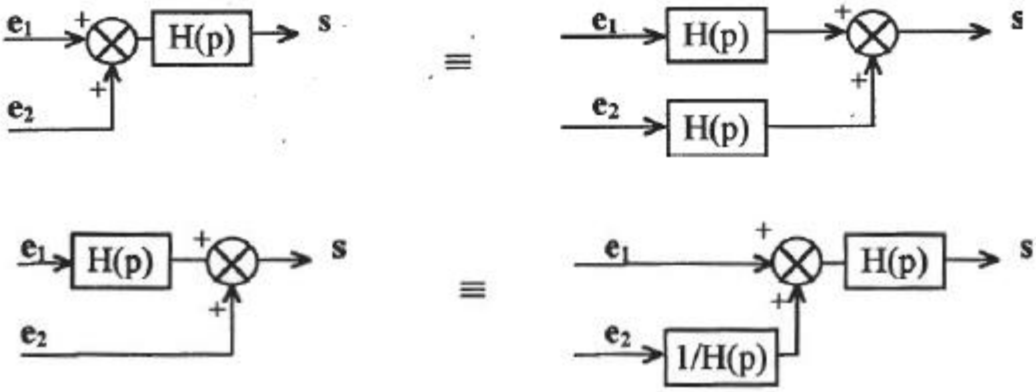
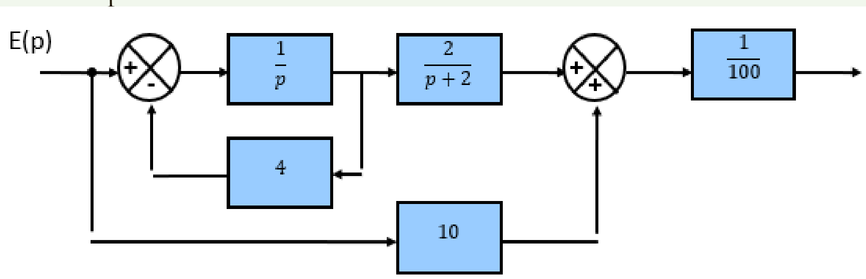
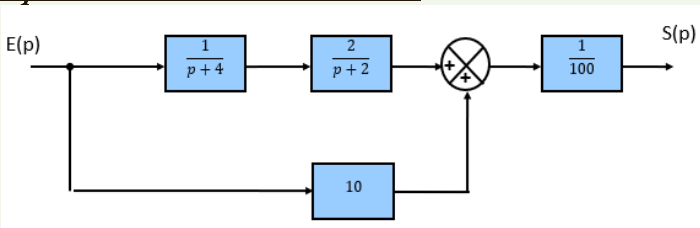


Figure 10 : *déplacement du point de prélèvement*

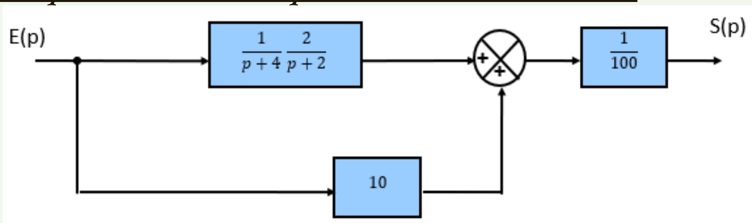
Exemple 6 : déterminer la fonction de transfert de l'activité d'un système représentée par le schéma-bloc ci-dessous :



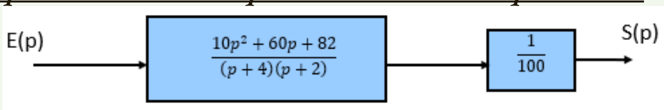
- ***Simplification 1 – boucle fermée :***



- ***Simplification 2 – simplification blocs en série :***



- ***Simplification 3 – simplification blocs en parallèle :***



- ***Simplification 4– simplification blocs en série :***

$$H(p) = \frac{1}{100}\frac{10p^2 + 60p + 82}{(p+4)(p+2)}$$

Références

[1] Cours de MPSI du lycée La Fayette, Clermont-Ferrand, 2013 (Pr. Pinault Bigeard)

[2] Cours de PCSI du lycée Joffre, Montpellier, 2019 (Pr. Fraysse)

[3] Cours de CPGE du pôle Chateaubriand Joliot-Curie, Rennes, 2019

[4] Cours de PCSI du lycée Saint Stanislas, 2019 (Pr. Parrila)

[5] Cours du lycée d'Arsonval, Saint-Maur-des-Fossés, 2019 (Pr. Paillet)