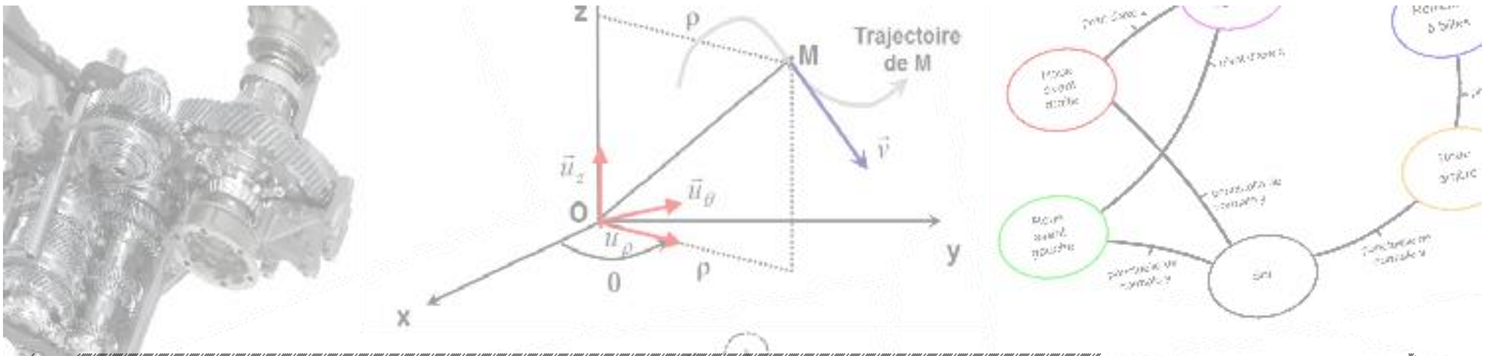


SEQUENCE 3

Cinématique des solides indéformables

Objectifs :
- ✓ *Proposer un modèle cinématique*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un point*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un solide*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 3 – Chap. 1

Chapitre 1

Cours

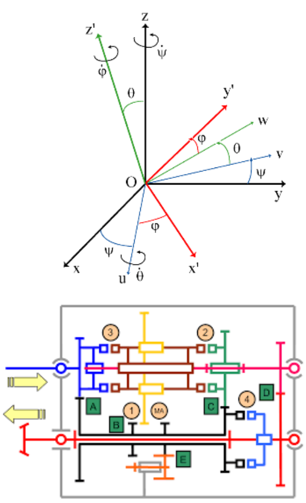
Introduction à la cinématique

Prérequis
- ✓ *Aucun*

Objectifs
- ✓ *Reconnaitre un graphe des structures*
- ✓ *Reconnaitre un schéma cinématique*
- ✓ *Acquérir les bases mathématiques*

Savoir-faire associés

M. II. 6. b



Les angles d'Euler et le schéma cinématique d'une boite de vitesse

PLAN DU CHAPITRE

Les mécanismes sont composés de pièces mobiles entre elles et les contacts entre ces pièces autorisent certains mouvements particuliers. Dans la grande majorité des mécanismes, les pièces sont suffisamment rigides pour que leurs déformations soient négligeables devant les déplacements globaux des pièces : on s'intéressera donc aux mouvements globaux sans tenir compte des déformations locales.

Pour de nombreux systèmes, en particulier pour ceux du domaine de la robotique industrielle ou grand public, un des principaux enjeux de leur concepteur est de faire en sorte qu'ils respectent parfaitement la cinématique imposée par leur cahier des charges. Il s'agit de s'assurer que les mouvements des solides qui les constituent s'exécutent parfaitement suivant des courses et à des vitesses maitrisées.

Figure 1 : *Ligne de fabrication du véhicule X6 BMW*

La première partie de ce cours sera illustré à l'aide du manège à sensation "Extrême" fabriqué par l'entreprise Italienne Moser's Rides et utilisé à la Foire du Trône (Paris) depuis 2006.

I. Présentation du manège

A. Présentation générale

La foire du trône, à proximité de Paris, est un parc d'attraction pour les plus petits comme les plus grands. Pour ces derniers, on y trouve des manèges à sensations comme le manège "Extrême" ci-dessous.

Figure 2 : *Le manège "Extrême" de la Foire du Trône.*

Le principe de ces manèges est de procurer aux passagers des sensations de vitesse, d'envol. Bien que la vitesse, pour des raisons de sécurité, ne soit pas très élevée dans l'absolu, les sensations de vitesse sont obtenues en alternant les passages en hauteur et les passages au raz du sol. L'impression d'envol est obtenue par la combinaison d'une accélération en translation et d'une prise de hauteur. Enfin on fait "tourner la tête" du passager en le désorientant par des rotations multiples qui lui font perdre le sens de la verticale.

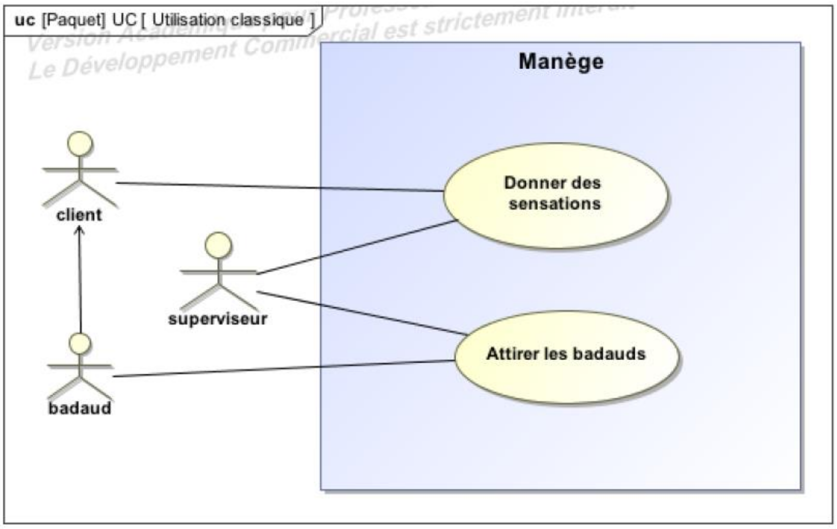


Figure 3 : *Diagramme SysML de cas d'utilisation*

Ce qui va nous intéresser dans ce cours est particulièrement les exigences associées à déplacer les passagers en termes de vitesse maximale et d'accélération maximale. Bien évidemment, on veut donner des sensations aux clients mais sans qu'ils n'en ressortent malades, on va donc limiter la vitesse maximale atteinte au niveau de la tête des passagers entre 30 et 50 Km/h. On va également limiter l'accélération maximale entre 1,2 et 1,8 g de manière à éviter d'éventuels malaises.

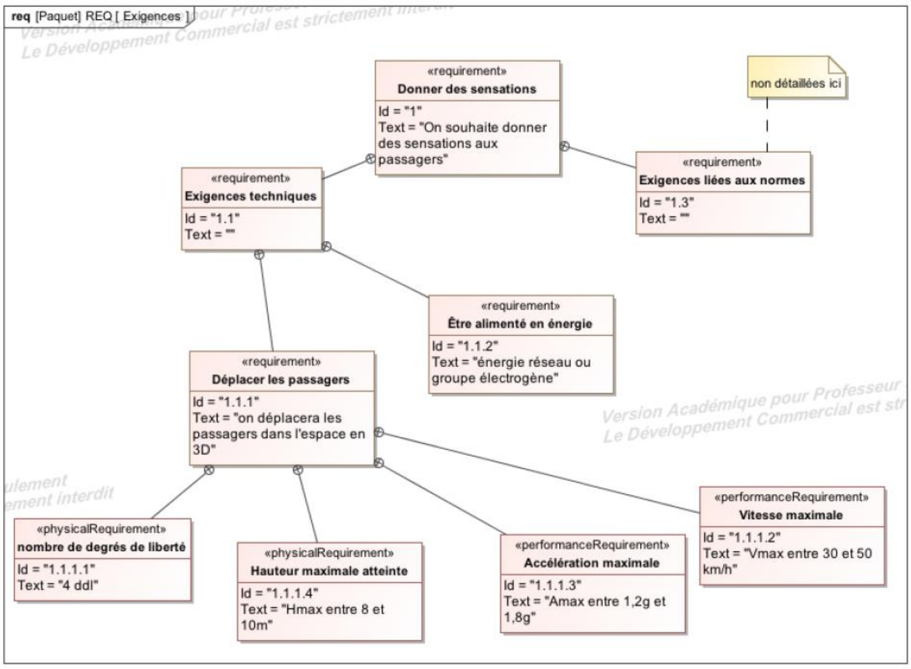


Figure 4 : *Diagramme des exigences de cas d'utilisation*

#	Id.	Nom	Détails
1	1.1.1	Déplacer les passagers	On déplacera les passagers dans l'espace 3D
2	1.1.1.1	Nombre de degrés de liberté	4 ddl
3	1.1.1.2	Vitesse maximale	Entre 30 et 50 km/h
4	1.1.1.3	Accélération maximale	Entre 1.2g et 1.8g
5	1.1.1.4	Hauteur maximale atteinte	Entre 8 et 10 m

Table 1 : *Tableau partiel des exigences*

B. Présentation du mouvement des pièces

On veut être capable d'évaluer les exigences rappelées dans la Table 1. On souhaite les comparer aux performances atteintes, à travers une étude du mouvement du mécanisme. Pour déterminer ces performances, l'ingénieur doit modéliser le mouvement du manège puis calculer les positions, les vitesses et les accélérations, non seulement celles des passagers, mais aussi celles des bras et des moteurs du manège. Pour modéliser les mouvements, il faut d'abord les observer. On distingue essentiellement deux mouvements : les translations et les rotations. La Figure 5 présente une première modélisation informelle et non normalisée. Cette représentation permet de commencer à poser dans le plan les dimensions, points et axes fondamentaux qui seront utiles lors de l'étude.

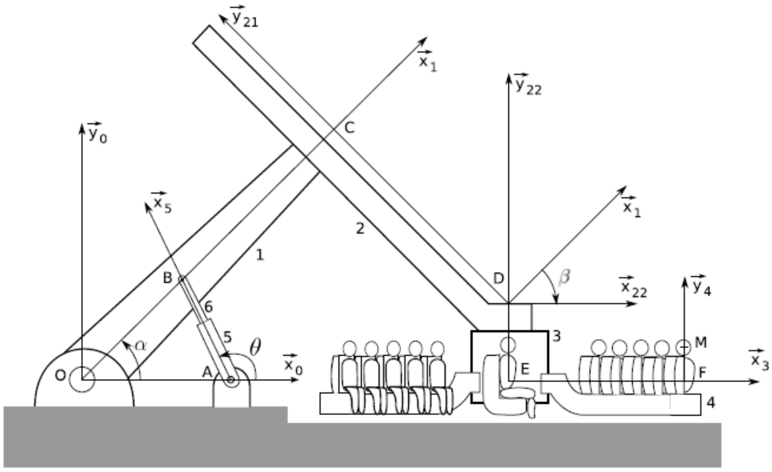


Figure 5 : *Paramétrage du manège*

Par exemple la tige 6 du vérin est en translation par rapport au corps 5 du vérin. La direction de la translation, c'est à dire la direction de la vitesse de 6 par rapport à 5, est $\underline{x_5}$. Le bras 1 est en rotation par rapport au sol. L'axe de la rotation est (O, $\underline{z}$), c'est à dire que les points de l'axe (O, $\underline{z}$) ont une vitesse nulle. D'autres solides ont des mouvements plus complexes, comme le bras 4 par rapport au sol, qui combine rotations et translations.

On remarque néanmoins qu'à chaque liaison entre solides, le mouvement est relativement simple et se décompose en quelques rotations ou translations bien déterminées :

- Le mouvement permis par la liaison entre 1 et 2 est une rotation d'axe (O, $\underline{x_1}$)
- Le mouvement permis par la liaison entre 2 et 3 est une rotation d'axe (D, $\underline{y_{22}}$)
- Le mouvement permis par la liaison entre 5 et 6 est une translation d'axe $\underline{x_5}$…

Il est ainsi possible de proposer des modèles cinématiques de liaisons, autorisant certaines rotations et/ou certaines translations, nous verrons ces modèles dans la suite du cours. On retiendra d'ores et déjà la liaison pivot qui autorise une unique rotation, et la liaison glissière qui autorise une unique translation.

C. Les modèles cinématiques

Modéliser, c'est donner une représentation simplifiée du système pour faire apparaître plus clairement les propriétés intéressantes dans le point de vue de l'étude. En cinématique, seuls les mouvements des pièces sont étudiés. On utilise donc des représentations laissant apparaître uniquement les solides et les liaisons entre solides.

Ces modèles sont utilisés en phase d'analyse de la chaîne d'énergie-puissance d'un système existant. Ils sont aussi utilisés en phase de conception d'un nouveau système car ils ne nécessitent pas de connaître la géométrie des pièces. Seules les positions relatives des liaisons ainsi que les mouvements possibles sont prises en compte. Les deux représentations, schéma cinématique et graphe des liaisons, sont des outils de communication scientifique efficaces.

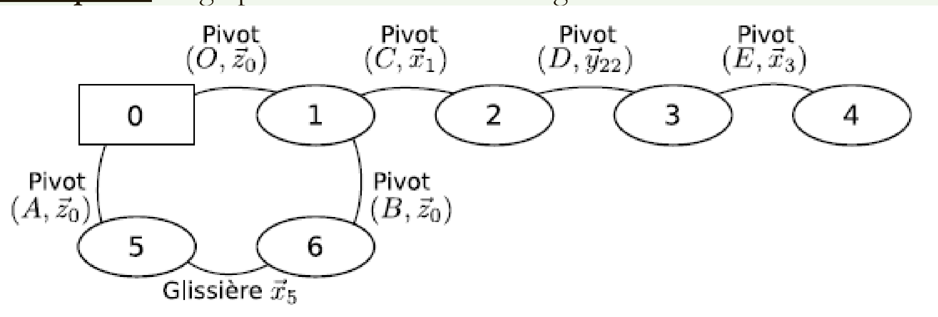
1. Les graphes de structure

Un système est un agencement de plusieurs composants. Certains d'entre eux sont assemblées de telle sorte qu'elles ne peuvent plus bouger entre elles (vissées, soudées, collées...). Elles forment des solides. Lorsque ces solides sont assemblés en autorisant certains mouvements, qui sont souvent pilotés par des actionneurs (moteurs, vérins...), ils forment un mécanisme. Ce mécanisme peut être représenté par un graphe de structure, dans lequel on fait apparaître les solides sous forme de cercles et les liaisons entre solides sous forme de traits. L'un des solides, appelé le bâti, est le lien mécanique principal avec l'extérieur du mécanisme. L'ensemble des solides forme une chaîne de solides. Si celle-ci n'est pas bouclée, elle est dite ouverte. Sinon, elle est dite fermée. S'il existe plusieurs boucles, on dira de plus qu'elle est complexe.

Définition 1 – graphe de structure : Dans un graphe de structure, on représente :

- les solides, représentées par des cercles ;
- les liaisons entre les solides, représentées par des traits, le long desquelles sont indiqués le nom et les caractéristiques géométriques de la liaison.

Exemple 1 : Le graphe de structure du manège :



Le graphe de structure laisse apparaître une part du mécanisme en chaîne ouverte : la chaîne de solides 0, 1, 2, 3 et 4, et une part du mécanisme en chaîne bouclée : la chaîne 0, 1, 6, 5, 0.

Exercice 1 : Le bras FANUC est monté sur un rail (0) que l'on suppose fixe. La base du robot (1) est reliée au premier bras (2), lui-même au deuxième bras (3) qui est finalement relié au porte-outil (4). Dans ce modèle, on a volontairement omis l'éventuel outil qui serait monté sur le porte-outil (4). Cette chaîne de solides ouverte permet de décrire la structure du mécanisme dont on souhaite étudier la cinématique.

- Donner le graphe de structure de ce robot.

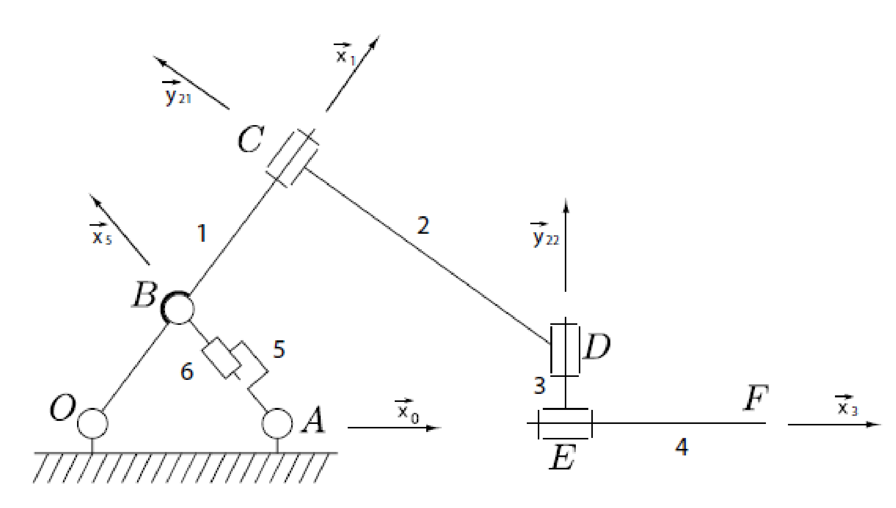
2. Les schémas cinématiques

Le schéma cinématique utilise une représentation normalisée des liaisons. Les solides sont eux représentés par des traits, entre les liaisons.

Définition 2 – schéma cinématique : Dans un schéma cinématique, on représente :

- les liaisons entre les solides sont représentées par des symboles normalisés ;
- les solides sont représentés par des traits reliant ces symboles.

Exemple 2 : Le schéma cinématique du manège :



Exercice 2 : Donner le schéma cinématique du robot de l'exercice 1.

II. Outils mathématiques

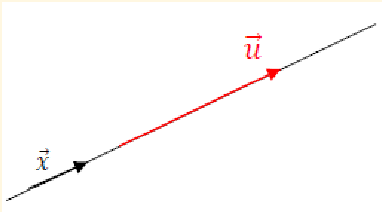
A. Géométrie vectorielle

1. Les vecteurs

<u>Définition 3 – Vecteur :</u> Un vecteur est un élément de l'espace vectoriel R. Il peut être défini de manière unique par 3 grandeurs (composantes) dans une base donnée de cet espace vectoriel R. Un vecteur est dit libre s'il n'est attaché à aucun point de l'espace sinon on dit qu'il est lié.

<u>Propriété 1 :</u> Un vecteur est défini par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme



<u>Propriété 2 :</u> Soit u_x, u_y et u_z, les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base B.
On a : $\vec{u} = u_x \cdot \vec{x} + u_y \cdot \vec{y} + u_z \cdot \vec{z}$
En notation verticale, on peut écrire les composantes d'un vecteur verticalement dans une matrice à 3 lignes et 1 colonne :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

<u>Propriété 3 :</u> la norme d'un vecteur $\vec{u}$ s'écrit $\|\vec{u}\|$. On a alors :

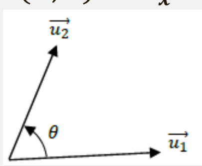
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2}$$

<u>Propriété 4 – Somme de vecteurs :</u> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a alors :

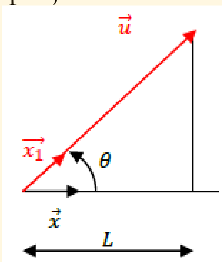
$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{bmatrix}$$

<u>Définition 4 – Produit scalaire :</u> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on appelle produit scalaire l'application :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

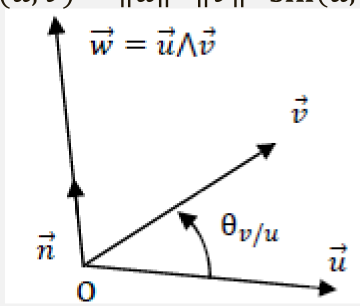


<u>Propriété 5 – Projection orthogonale :</u> Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\vec{x}$ un vecteur unitaire de la base, $\vec{u}.\vec{x}$ est la projection du vecteur $\vec{u}$ sur $\vec{x}$.



<u>Définition 5 – Produit vectoriel :</u> Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\vec{n}$ le vecteur normal au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit vectoriel l'application :

$$vect(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u},\vec{v}) \cdot \vec{n}$$

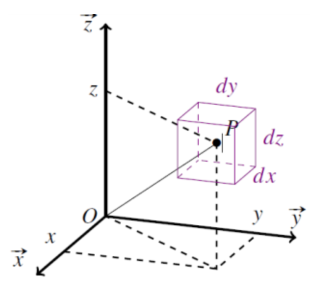
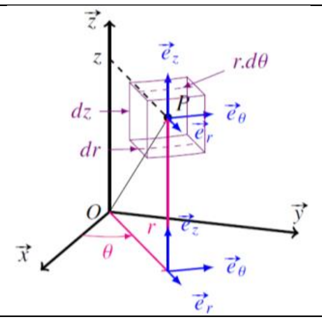
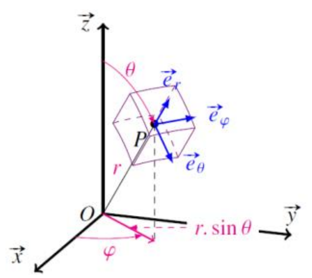


<u>Propriété 6 – Calcul avec les composantes :</u>

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y \\ u_z \cdot v_x - u_x \cdot v_z \\ u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x \end{bmatrix}$$

2. Paramétrage d'un point

Pour repérer un point, on peut utiliser 3 systèmes de coordonnées. Chacun d'entre eux sera utilisé en fonction du cas traité et il est possible de passer de l'un à l'autre en transformant les coordonnées.

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Vecteur position	$\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$	$\overrightarrow{OP} = r \cdot \vec{e_r} + z \cdot \vec{z}$	$\overrightarrow{OP} = r \cdot \vec{e_r}$
Projection		$\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$
Illustration			

<u>Table 2 :</u> *Les 3 systèmes de coordonnées*

3. Orientation des bases

La cinématique des systèmes fait appel à plusieurs solides en liaison les uns par rapport aux autres. Il est alors nécessaire de les positionner les uns par rapport aux autres. Pour ce faire, on attache un repère à chacun entre eux, comme l'illustre l'Exemple 2. Il faudra alors positionner leurs origines, à l'aide d'un des systèmes de coordonnés présenté précédemment et orienter leurs bases à l'aide de plusieurs paramètres.

Les angles d'Euler sont une solution pour les définir. On passe de la base $\mathfrak{B}_0$ à la base $\mathfrak{B}_1$ par 3 rotations successives d'angles ψ, θ et φ, Figure 6. On peut aussi utiliser les angles de roulis, lacet et tangage. Les angles d'Euler sont en pratique peu employés en cinématique du solide. En effet, la réalisation technologique d'un mécanisme fait que l'orientation d'un solide 1 par rapport à un solide 0 va résulter d'une succession de liaisons qui engendre des rotations dont les axes matériels sont clairement identifiés.

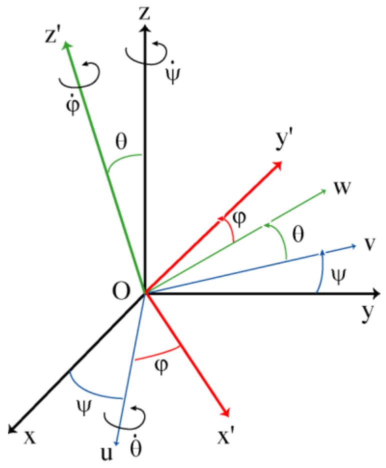


Figure 6 : *Les angles d'Euler*

4. Changement de base

En mécanique, la projection d'un vecteur dans une base est un élément essentiel qui, s'il n'est pas maîtrisé, ne permet pas d'obtenir de résultats justes. Il faut donc parfaitement maîtriser les projections, en particulier leur signe. Soit $\mathfrak{B}_i$ une base $(\vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$, $\mathfrak{B}_j$ une base $(\vec{x_j}, \vec{y_j}, \vec{z_j})$, en rotation autour de leur même vecteur $\vec{z_i}$ et l'angle $\theta_{j/i}$ orientant la base $\mathfrak{B}_i$ par rapport à la base $\mathfrak{B}_j$. $\theta_{j/i}$ est l'angle qui par de $\vec{x_i}$ et qui va vers $\vec{x_j}$, Figure 7.

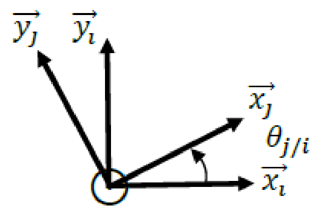


Figure 7 : *Paramétrage du problème*

On a alors :

$$\vec{x_j} = cos\theta_{j/i} \cdot \vec{x_i} + sin\theta_{j/i} \cdot \vec{y_i} = \begin{bmatrix} cos\theta_{j/i} \\ sin\theta_{j/i} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

$$\vec{y_j} = -sin\theta_{j/i} \cdot \vec{x_i} + cos\theta_{j/i} \cdot \vec{y_i} = \begin{bmatrix} -sin\theta_{j/i} \\ cos\theta_{j/i} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_i}$$

B. Trigonométrie

Il est nécessaire de maîtriser le sinus et le cosinus pour aborder la mécanique. Que ce soit pour des projections, des calculs de moments, produits scalaires et vectoriels, la trigonométrie intervient. La base consiste à maîtriser le cercle de rayon 1, Figure 8, et de savoir interpréter les valeurs de sinus et cosinus sur ce cercle pour un angle θ, Figure 9 et les dérivés de ces deux fonctions.

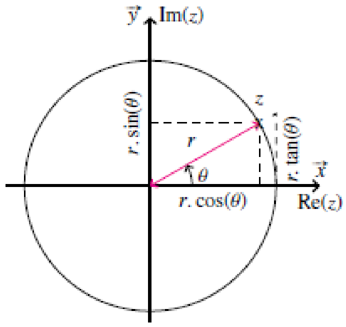


Figure 8 : *Le cercle trigonométrique*

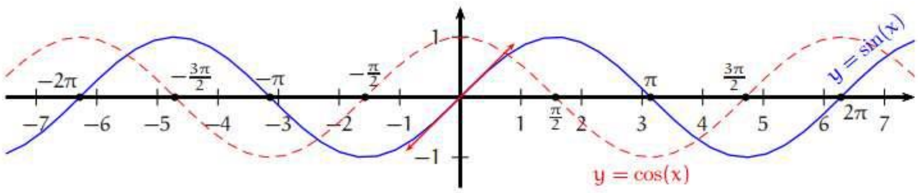


Figure 9 : *Les fonctions sinus et cosinus*

Références

[1] Cours de MPSI du lycée La Fayette, Clermont-Ferrand, 2013 (Pr. Pinault Bigeard)

[2] Cours de CPGE du Lycée Saint Stanislas, Nantes, 2020

[3] Cours de CPGE du pôle Chateaubriand Joliot-Curie, Rennes, 2019

[4] Cours de CPGE du lycée Pierre de Fermat, Toulouse, 2018

[5] Cours du lycée d'Arsonval, Saint-Maur-des-Fossés, 2019 (Pr. Paillet)