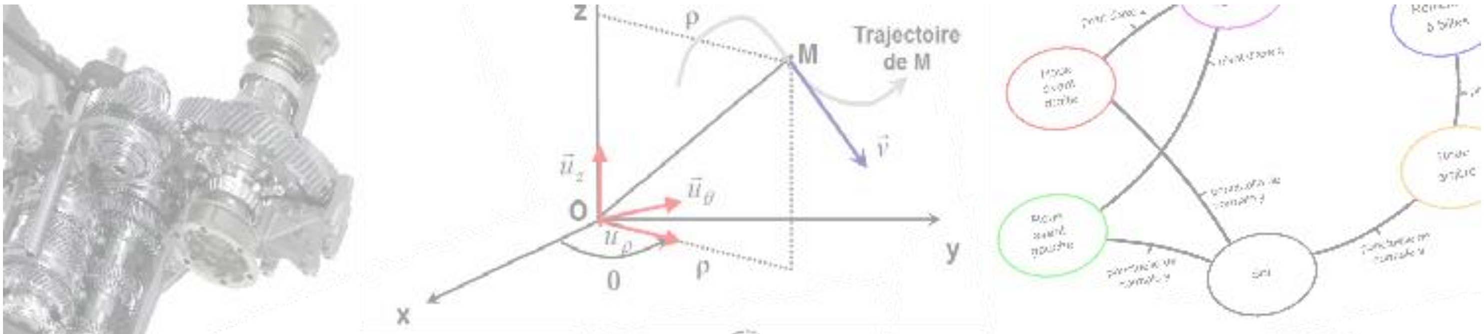


SEQUENCE III

Cinématique des solides indéformables

Objectifs :

- ✓ *Proposer un modèle cinématique*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un point*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un solide*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 3 – Chap. 2

Chapitre 2

Cours

Calculer vitesse et accélération d'un point de l'espace

Prérequis

- ✓ *Séquence 3 – Chapitre 1*

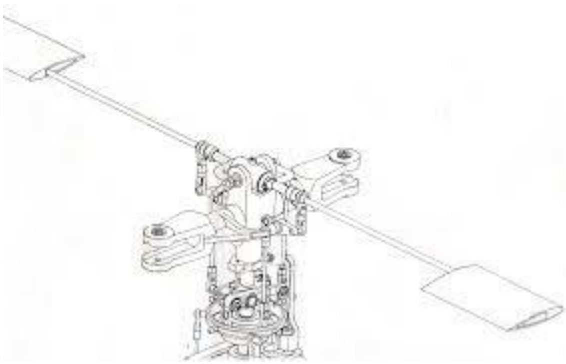
Objectifs

- ✓ *Définir la vitesse et l'accélération*
- ✓ *Calculer une vitesse à partir de la formule de dérivation composée*

Savoir-faire associés

RI4

PLAN DU CHAPITRE



La cinématique du point permet, par exemple, de calculer la vitesse limite de rotation d'un rotor d'hélicoptère

La cinématique des systèmes de solides indéformables est l'étude des mouvements (position, vitesse et accélération) des corps par rapport à un référentiel en fonction du temps, indépendamment des causes qui les ont provoqués.

I. Notion élémentaire de cinématique

Cette partie vise à rappeler et compléter les notions de base vues en cinématique du point dans le cours de physique. Il est indispensable de maîtriser ces notions pour développer le cours de cinématique des solides.

A. Notion de référentiel : l'espace-temps

La problématique initiale lors de l'étude des performances cinématiques d'un système est de fournir les informations nécessaires et suffisantes pour repérer, à chaque instant, un point dans l'espace.

1. Repère d'observation

Il est indispensable de définir un repère de référence pour décrire la position et/ou le mouvement d'un point (à rapprocher de la notion d'observateur du mouvement). La position d'un point ou son mouvement seront différents selon le repère d'observation choisi.

Exemple 1 : Le mouvement d'un voyageur se déplaçant dans un train sera différent si on l'observe dans un repère lié au train ou dans un repère lié à la Terre. Pour l'étude de la trajectoire d'un satellite dans l'espace, la trajectoire sera différente si elle est décrite dans un repère lié à la Terre ou dans un repère lié au système solaire.

Définition 1 – Repère : Une repère noté $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est défini par :

- Une origine O ;
- Une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

L'ensemble origine et base forme un repère spatial d'observation.

2. Chronologie

En plus du repère de l'espace, il est nécessaire de définir une chronologie, pour le paramétrage du temps. Une position est définie par sa date, appelée instant. La différence entre deux instants est appelée durée. En mécanique classique, le repère temporel est unique.

Définition 2 – Référentiel : L'ensemble repère spatial et repère temporel forme un référentiel.

Propriété 1 – Paramétrage d'un point par rapport à un référentiel : Le paramétrage permet de définir la position d'un élément (point ou solide mécanique) par rapport à une référence avec le minimum de grandeurs appelées "paramètres du problème". Pour définir rigoureusement la position d'un point par rapport à un référentiel, trois paramètres spatiaux et un paramètre temporel sont nécessaires

3. Utilisation de plusieurs repères intermédiaires

Dans un grand nombre d'applications étudiées en Sciences Industrielles de l'Ingénieur, le vecteur position $\overrightarrow{O_f M}$ d'un point par rapport au repère R_f peut être facilement et rapidement décrit en utilisant des points intermédiaires appartenant aux solides composants le système étudié, par exemple sous la forme $\overrightarrow{O_f M} = \overrightarrow{O_f O_1} + \overrightarrow{O_1 M}$, comme l'illustre la Figure 1.

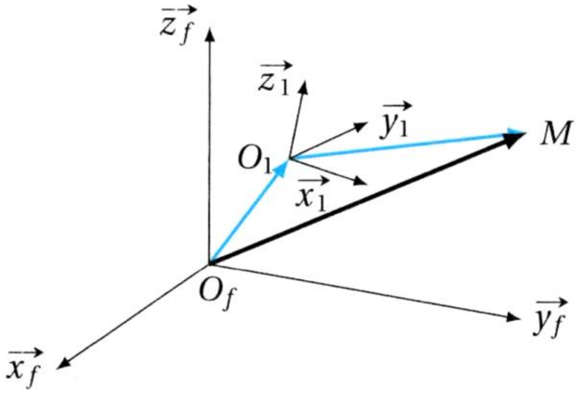


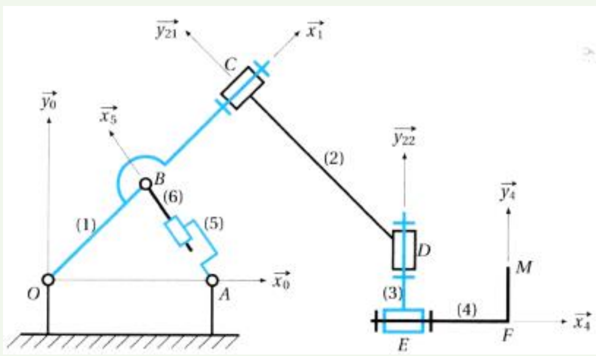
Figure 1 : *Positionnement d'un point M dans le référentiel R_f*

Les différents vecteurs se nomment respectivement :

- $\overrightarrow{O_f M}$: vecteur position du point M par rapport à R_f ;
- $\overrightarrow{O_f O_1}$: vecteur position du point O_1 par rapport à R_f ;
- $\overrightarrow{O_1 M}$: vecteur position du point M par rapport à R_1 ;

Exemple 2 - Manège forain : Sur la Figure suivante, la position du point F correspondant au centre de gravité du passager assis à l'extérieur du bras (4) par rapport au sol (0) est caractérisé par le vecteur position $\overrightarrow{OF}$ qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$
$$\overrightarrow{OF} = L_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + L_2 \cdot \overrightarrow{y_{21}} + L_3 \cdot \overrightarrow{y_{22}} + L_3 \cdot \overrightarrow{x_3}$$



Cette expression est généralement suffisante pour poursuivre l'étude cinématique. Comme dit précédemment, il est conseillé de conserver au maximum cette expression vectorielle sans la projeter dans une base particulière.

B. Position d'un point mobile par rapport à un référentiel :

Soit M défini par ses trois coordonnées fonction du temps. On définit alors le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$, comme l'illustre la Figure 2.

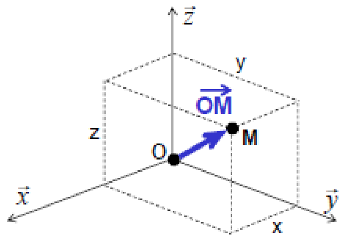


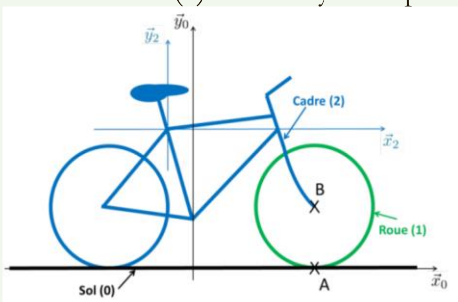
Figure 2 : *Coordonnés d'un point M*

> **Définition 3 – Trajectoire :** La trajectoire d'un point M fixe dans un référentiel Rf est le lieu des positions successives occupées par ce point M dans le repère Rf au cours du temps. La trajectoire dépend du référentiel, c'est-à-dire du repère d'observation : il est donc impossible de parler de trajectoire sans mentionner explicitement le référentiel.

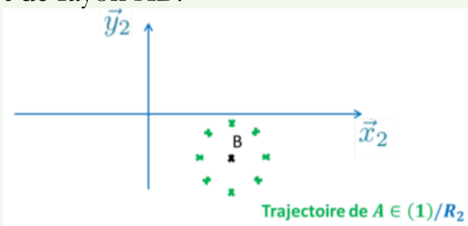
La trajectoire peut être :

- Rectiligne, si la trajectoire est un segment de droite ;
- Circulaire, si la trajectoire est un arc de cercle ;
- Quelconque, si la trajectoire est une courbe quelconque.

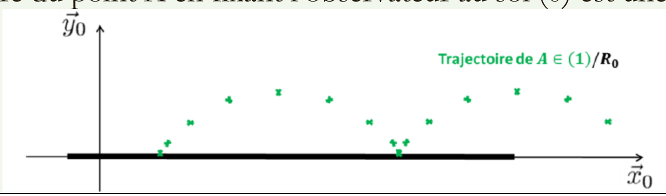
> **Exemple 2 – Cas de la bicyclette :** On s'intéresse à la trajectoire du point A, un point appartenant à la roue (1) de la bicyclette présentée ci-dessous.



La trajectoire du point A en fixant l'observateur au centre de la roue (1) un cercle de centre B et de rayon AB.



La trajectoire du point A en fixant l'observateur au sol (0) est une cycloïde.



C. Vitesse d'un point par rapport à un référentiel :

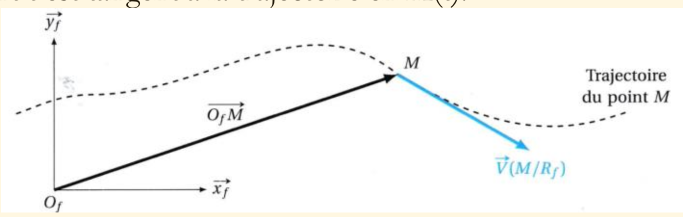
Définition 4 – Vitesse : La vitesse d'un point M par rapport à un référentiel R_f (Of, $\vec{x_f}$, $\vec{y_f}$, $\vec{z_f}$) est égale à la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{O_fM(t)}$ dans la base B_f associée au référentiel R_f :

$$\vec{V}(M/R_f, t) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_fM(t)})}{dt}\right|_{B_f}$$

Propriété 2 – Notation : Comme le vecteur position, le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_f, t)$ dépend du temps. Cependant, afin d'alléger les notations, cette dépendance temporelle ne sera plus indiquée et seule la notation $\vec{V}(M/R_f)$ sera utilisé dans la suite.
Par simplicité d'écriture on utilisera régulièrement la forme suivante :

$$\vec{V}(M/R_f) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_fM(t)})}{dt}\right|_{f}$$

Propriété 3 – Direction de la vitesse : Le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_f)$ du point M à l'instant t est tangent à la trajectoire en M(t).



D. Accélération d'un point par rapport à un référentiel :

Définition 5 – Accélération : L'accélération d'un point M par rapport à un référentiel R_f (Of, $\vec{x_f}$, $\vec{y_f}$, $\vec{z_f}$) est égale à la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R_f)$ dans la base B_f associée au référentiel R_f :

$$\vec{a}(M/R_f, t) = \left.\frac{d(\vec{V}(M/R_f))}{dt}\right|_{B_f}$$

Propriété 4 – Notation : Comme pour le vecteur accélération, on notera $\vec{a}(M/R_f)$ sans indiquer la dépendance temporelle.
Par simplicité d'écriture on utilisera régulièrement la forme suivante :

$$\vec{a}(M/R_f, t) = \left.\frac{d(\vec{V}(M/R_f))}{dt}\right|_{f}$$

II. Calcul de la dérivée d'un vecteur :

Jusqu'à présent, vous ne connaissiez la dérivée que d'une fonction scalaire sans parler de base fixe ou mobile. En mécanique, nous allons dériver des fonctions scalaires et des vecteurs, et ce relativement à des bases associées à des solides qui vont changer d'orientation dans le temps, du fait des mouvements des différents solides d'un mécanisme les uns par rapport aux autres.

A. Les définitions des vecteurs vitesse

La vitesse $\vec{V}(M/R_f)$ et accélération $\vec{a}(M/R_f)$ d'un point M par rapport à un repère Rf font apparaître la dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un repère ou une base associée. Pour que le calcul de ces dérivées soit efficace, la méthode sera différente selon que le vecteur soit connu par ses composantes dans la base de dérivation ou dans une base différente de celle de dérivation (voire dans plusieurs bases différentes).

1. Vecteur connu par ses composantes dans la base de dérivation :

Propriété 5 : Lorsque le vecteur position $\overrightarrow{O_f M(\mathbf{t})}$ est écrit dans la base B_f sous la forme $\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{x_f} + y \cdot \overrightarrow{y_f} + \mathrm{z} \cdot \overrightarrow{z_f}$. Le calcul de la vitesse $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M}/\mathbf{R_f})$ est simple puisqu'il suffit de dériver les composantes du vecteur position pour trouver :

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathbf{M}/\mathbf{R_f}) = \frac{dx}{dt} \cdot \overrightarrow{x_f} + \frac{dy}{dt} \cdot \overrightarrow{y_f} + \frac{dz}{dt} \cdot \overrightarrow{z_f}$$

Ou encore :

$$\vec{\mathrm{V}}(\mathbf{M}/\mathbf{R_f}) = \dot{x} \cdot \overrightarrow{x_f} + \dot{y} \cdot \overrightarrow{y_f} + \dot{\mathrm{z}} \cdot \overrightarrow{z_f}$$

2. Vecteur connu par ses composantes dans une base différente de la base de dérivation

Soit deux repères orthonormés directs R_0 $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et R_1 $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. Considérons le vecteur $\vec{U}$ exprimé dans le repère R tel que $\vec{U} = x(t) \cdot \overrightarrow{x_1} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_1} + \mathrm{z}(\mathrm{t}) \cdot \overrightarrow{z_1}$. Calculons la dérivée du vecteur $\vec{\mathrm{U}}$ par rapport à la variable *t* dans le repère R.

Dans un premier temps nous considérerons qu'une rotation d'angle $\alpha = (\vec{x}, \overrightarrow{x_1})$ autours de l'axe $\vec{z}$ permet de définir le repère R_1 à partir de R_0, Figure 3. Dans un second temps, nous généraliseront ce résultat.

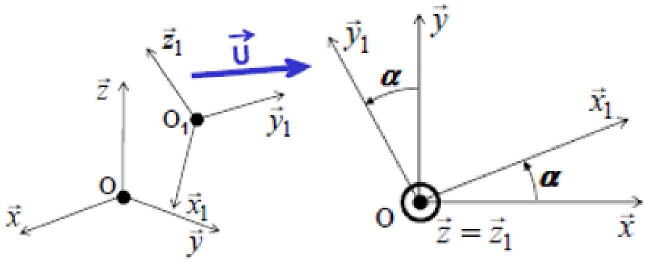


Figure 3 : *Définition du vecteur* $\vec{U}$ *et du paramétrage angulaire*

La dérivée du vecteur $\vec{U}$ par rapport à *t* dans *R₀* s'écrit :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(x(t)\cdot\vec{x_1}+y(t)\cdot\vec{y_1}+z(t)\cdot\vec{z_1})}{dt}\right|_0$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(x(t)\cdot\vec{x_1})}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d(y(t)\cdot\vec{y_1})}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d(z(t)\cdot\vec{z_1})}{dt}\right|_0$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = x(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 + \vec{x_1}\cdot\left.\frac{d(x(t))}{dt}\right|_0 + y(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 + \vec{y_1}\cdot\left.\frac{d(y(t))}{dt}\right|_0 + z(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{z_1})}{dt}\right|_0 + \vec{z_1}\cdot\left.\frac{d(z(t))}{dt}\right|_0$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \dot{x}\cdot\vec{x_1}+\dot{y}\cdot\vec{y_1}+\dot{z}\cdot\vec{z_1} + x(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 + y(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 + z(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{z_1})}{dt}\right|_0$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_1 + x(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 + y(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 + z(t)\cdot\left.\frac{d(\vec{z_1})}{dt}\right|_0$$

D'après la Figure 3, les vecteurs du vecteur R_1 peuvent être exprimé dans R_0. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{x_1} = cos\alpha\cdot\vec{x} + sin\alpha\cdot\vec{y} \\ \vec{y_1} = -sin\alpha\cdot\vec{x} + cos\alpha\cdot\vec{y} \\ \vec{z_1} = \vec{z} \end{cases}$$

On en déduit donc que l'on a :

$$\begin{cases} \left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(cos\alpha\cdot\vec{x}+sin\alpha\cdot\vec{y})}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(-sin\alpha\cdot\vec{x}+cos\alpha\cdot\vec{y})}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{z_1})}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(\vec{z})}{dt}\right|_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(cos\alpha\cdot\vec{x})}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d(sin\alpha\cdot\vec{y})}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d(-sin\alpha\cdot\vec{x})}{dt}\right|_0 + \left.\frac{d(cos\alpha\cdot\vec{y})}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{z_1})}{dt}\right|_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 = cos\alpha\cdot\left.\frac{d(\vec{x})}{dt}\right|_0 + \vec{x}\cdot\left.\frac{d(cos\alpha)}{dt}\right|_0 + sin\alpha\cdot\left.\frac{d(\vec{y})}{dt}\right|_0 + \vec{y}\cdot\left.\frac{d(sin\alpha)}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 = -sin\alpha\cdot\left.\frac{d(\vec{x})}{dt}\right|_0 - \vec{x}\cdot\left.\frac{d(sin\alpha)}{dt}\right|_0 + cos\alpha\cdot\left.\frac{d(\vec{y})}{dt}\right|_0 + \vec{y}\cdot\left.\frac{d(cos\alpha)}{dt}\right|_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\frac{d(\vec{x_1})}{dt}\right|_0 = \vec{x}\cdot\left.\frac{d(cos\alpha)}{dt}\right|_0 + \vec{y}\cdot\left.\frac{d(sin\alpha)}{dt}\right|_0 \\ \left.\frac{d(\vec{y_1})}{dt}\right|_0 = -\vec{x}\cdot\left.\frac{d(sin\alpha)}{dt}\right|_0 + \vec{y}\cdot\left.\frac{d(cos\alpha)}{dt}\right|_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot sin\alpha \cdot \vec{x} - \dot{\alpha} \cdot cos\alpha \cdot \vec{y} \\ \left.\dfrac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot cos\alpha \cdot \vec{x} + \dot{\alpha} \cdot sin\alpha \cdot \vec{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ \left.\dfrac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} \\ \left.\dfrac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} \\ \left.\dfrac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_1} \end{cases}$$

On a donc :

$$x(t) \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_0 + y(t) \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 + \mathrm{z(t)} \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{z_1})}{dt}\right|_0 = x(t) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{x_1} + y(t) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1} + \mathrm{z(t)} \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{z_1}$$

$$x(t) \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right|_0 + y(t) \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0 + \mathrm{z(t)} \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{z_1})}{dt}\right|_0 = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge (x(t) \cdot \overrightarrow{x_1} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_1} + \mathrm{z(t)} \cdot \overrightarrow{z_1})$$

On obtient donc :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_1 + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge (x(t) \cdot \overrightarrow{x_1} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_1} + \mathrm{z(t)} \cdot \overrightarrow{z_1})$$

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_1 + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \vec{U}$$

En considérant les angles d'Euler, Figure 4 et en généralisant le travail précédant, on obtient :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_1 + (\dot{\psi} \cdot \vec{z} + \dot{\theta} \cdot \vec{u} + \dot{\varphi} \cdot \overrightarrow{z_1}) \wedge \vec{U}$$

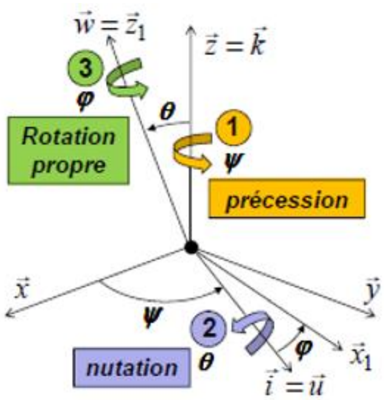


Figure 4 : *Définition des angles d'Euler*

Définition 6 – Vecteur rotation : On appelle vecteur rotation de R_1 par rapport à R le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R_1/R}}} = \dot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \vec{\mathbf{z}} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{z_1}}$. Ce vecteur caractérise à tout instant l'orientation du repère R1 par rapport à R c'est-à-dire qu'il précise :

- L'axe instantané autour duquel tourne R_1 par rapport à R
- La valeur de la vitesse angulaire instantanée en rad/s
- Le sens de la rotation

En prenant en compte la définition du vecteur rotation, on obtient la formule fondamentale de la dérivation composée :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_1 + (\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{R_1/R}}}) \wedge \vec{U}$$

Propriété 6 – Formule de Bour : Soit deux bases $\mathfrak{B}_i$ $(\overrightarrow{x_\iota}, \overrightarrow{y_\iota}, \overrightarrow{z_\iota})$ et $\mathfrak{B}_j$ une base $(\overrightarrow{x_J}, \overrightarrow{y_J}, \overrightarrow{z_J})$ et un vecteur $\vec{v}$, d'après la formule de Bour, on a :

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_i} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_j} + \overrightarrow{\Omega_{J/\iota}} \wedge \vec{v}$$

3. Cas usuels

Expression cartésienne du vecteur vitesse : le calcul du vecteur vitesse peut se faire à partir de la donnée du vecteur position en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{x} + y(t) \cdot \vec{y} + z(t) \cdot \vec{z}$$

D'où :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x} \cdot \vec{x} + \dot{y} \cdot \vec{y} + \dot{z} \cdot \vec{z}$$

Expression cylindrique du vecteur vitesse : l'expression cylindrique du vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \cdot \overrightarrow{e_r} + z(t) \cdot \vec{z}$$

On appelle B_0 et B_1 les bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \vec{z})$, Figure 5, d'après la formule de dérivation vectorielle, on a :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

D'où :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d(r(t) \cdot \overrightarrow{e_r} + z(t) \cdot \vec{z})}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge (r(t) \cdot \overrightarrow{e_r} + z(t) \cdot \vec{z})$$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d(r(t) \cdot \overrightarrow{e_r})}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \left.\frac{d(z(t) \cdot \vec{z})}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge r(t) \cdot \overrightarrow{e_r} + \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge z(t) \cdot \vec{z}$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r(t)} \cdot \overrightarrow{e_r} + \dot{z(t)} \cdot \vec{z} + r(t) \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

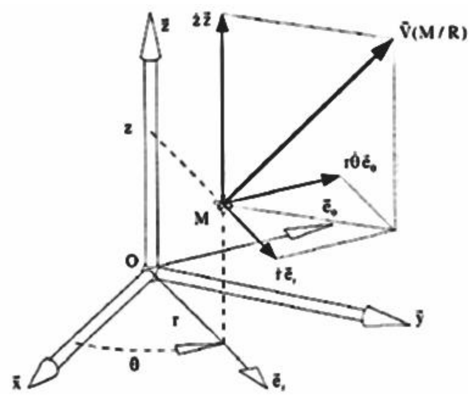


Figure 5 : *Définition des bases* B_0 *et* B_1

Expression cartésienne du vecteur accélération : on rappelle l'expression cartésienne du vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\cdot\vec{x} + \dot{y}\cdot\vec{y} + \dot{z}\cdot\vec{z}$$

D'où :

$$\vec{a}(M/R) = \vec{\Gamma}(M/R) = \ddot{x}\cdot\vec{x} + \ddot{y}\cdot\vec{y} + \ddot{z}\cdot\vec{z}$$

Expression cylindrique du vecteur accélération : l'expression cylindrique du vecteur position est :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \dot{z(t)}\cdot\vec{z} + r(t)\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta}$$

On appelle B_0 et B_1 les bases $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{z})$, Figure 5, d'après la formule de dérivation vectorielle, on a :

$$\vec{a}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{V}(M/R)$$

$$\vec{a}(M/R) = \left.\frac{d\left(\dot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \dot{z(t)}\cdot\vec{z} + r(t)\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta}\right)}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\dot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \dot{z(t)}\cdot\vec{z} + r(t)\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta}\right)$$

$$\vec{a}(M/R) = \ddot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \ddot{z(t)}\cdot\vec{z} + \left(\dot{r(t)}\cdot\dot{\theta} + r(t)\cdot\ddot{\theta}\right)\cdot\vec{e_\theta} + \dot{\theta} \cdot\vec{z} \wedge\left(\dot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \dot{z(t)}\cdot\vec{z} + r(t)\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e_\theta}\right)$$

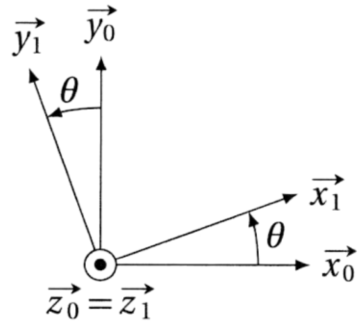
$$\vec{a}(M/R) = \ddot{r(t)}\cdot\vec{e_r} + \ddot{z(t)}\cdot\vec{z} + \left(\dot{r(t)}\cdot\dot{\theta} + r(t)\cdot\ddot{\theta}\right)\cdot\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\cdot\ \dot{r(t)}\cdot\vec{e_\theta} - r(t)\cdot\dot{\theta}^2\cdot\vec{e_r}$$

$$\vec{a}(M/R) = \left(\ddot{r(t)} - r(t)\cdot\dot{\theta}^2\right)\cdot\vec{e_r} + \ddot{z(t)}\cdot\vec{z} + \left(2\cdot\dot{r(t)}\cdot\dot{\theta} + r(t)\cdot\ddot{\theta}\right)\cdot\vec{e_\theta}$$

B. Vecteur vitesse angulaire :

1. Cas d'une rotation unique :

Soit un solide (1) possédant un mouvement de rotation unique d'axe de vecteur directeur $\overrightarrow{z_0}$ et de paramètre angulaire θ par rapport à une référence (0). La Figure 6 représente la figure de changement de base correspondant à ce mouvement.



<u>Figure 6 :</u> *Figure de changement de base de B_0 vers B_1*

<u>Propriété 7 – Caractéristiques du vecteur vitesse angulaire :</u> Le vecteur vitesse angulaire est colinéaire à la direction de l'axe de rotation et proportionnel à la dérivée du paramètre angulaire.

$$\overrightarrow{\Omega_{j/i}} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \overrightarrow{x_i} \wedge \overrightarrow{y_i}$$

Afin d'éviter, au maximum, les erreurs de calculs dans les projections, on dessinera toujours les figures de changement de bases planes avec des angles orientés positifs et "petits" (typiquement inférieur à 30°) comme sur la Figure 6.

2. Cas de rotations multiples

Soient n espace affines ε_i, i=1 à n, à trois dimensions et E_i, les espaces vectoriels associés. On note B_i, la vase d'un repère orthonormé direct R_i de ε_i.

Etant donné un vecteur $\vec{v}$, on peut écrire successivement :

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{v}$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_{n-1}} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_n} + \overrightarrow{\Omega_{n/n-1}} \wedge \vec{v}$$

Après ajout membre à membre de ces égalités et simplification, il vient :

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_n} + (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{n/n-1}}) \wedge \vec{v}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_1} = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\mathfrak{B}_n} + \overrightarrow{\Omega_{n/1}} \wedge \vec{v}$$

On en déduit donc par identification :

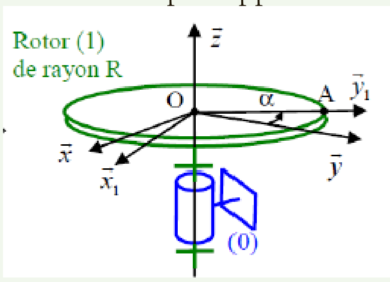
$$\overrightarrow{\Omega_{n/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \cdots + \overrightarrow{\Omega_{n/n-1}}$$

Propriété 8 – Composition des vecteurs vitesse angulaire : Dans le cas de l'utilisation de plusieurs bases, la: relation suivante peut être établie :

$$\overrightarrow{\Omega_{n/1}} = \sum_{i=2}^{n} \overrightarrow{\Omega_{i/i-1}}$$

III. Exemple d'application :

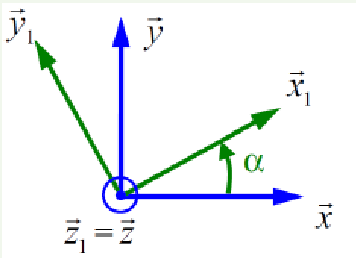
Exemple 1 – Calcul de la vitesse d'un point d'un rotor : Le rotor (1) est animé d'un mouvement de rotation par rapport au bâti (0).



Au bâti (0) est lié le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.
Au rotor (1) est lié le repère $R_1(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$.

Calculer la vitesse du point A appartenant au rotor (1) dans son mouvement par rapport au bâti (0), $\vec{V}(A/R_0)$.

On fait la figure place associée au mouvement :



Vecteur vitesse de rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$

Position du point A : $\overrightarrow{OA} = R \cdot \overrightarrow{y_1}$

$$\vec{V}(A/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_0$$

$$\vec{V}(A/R_0) = \left.\frac{d(R \cdot \overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0$$

$$\vec{V}(A/R_0) = R \cdot \left.\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_0$$

$$\vec{V}(A/R_0) = R \cdot \left(\left.\frac{d(\overrightarrow{y_1})}{dt}\right|_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{y_1}\right)$$

$$\vec{V}(A/R_0) = R \cdot (0 + \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \wedge \overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{V}(A/R_0) = -R \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1}$$