Travaux Dirigés 7

Cinématique du point

Exercice 1 : Space Mountain

Le Space Mountain est une attraction installée au parc Disneyland Paris. Elle se présente sous la forme d'un chapiteau renfermant une montagne russe à grande vitesse. Le système de lancement de la montagne russe, évoquant un canon, est une catapulte à propulsion électrique de type porte-avions. Un pousseur vient en contact avec le train (contenant les passagers) afin de le propulser.

Figure 1 : *le Space Mountain*

Les critères suivants caractérisent la fonction de propulsion :

Critère	Niveaux
Temps de cycle	t<30 s
Fréquence de lancement	1 toute les 36 s
Masse propulsée	7500 kg maxi
Inclinaison voie	34°
Vitesse de propulsion	18 $m.s^{-1}$ ± 5%
Accélération	8 $m.s^{-2}$ ± 1 $m.s^{-2}$
Dépassement des capacités humaines	0

On s'intéresse dans ce sujet à valider le non-dépassement des capacités humaines en termes d'accélérations supportées. On donne ci-dessous le modèle cinématique de la catapulte et d'un passager.

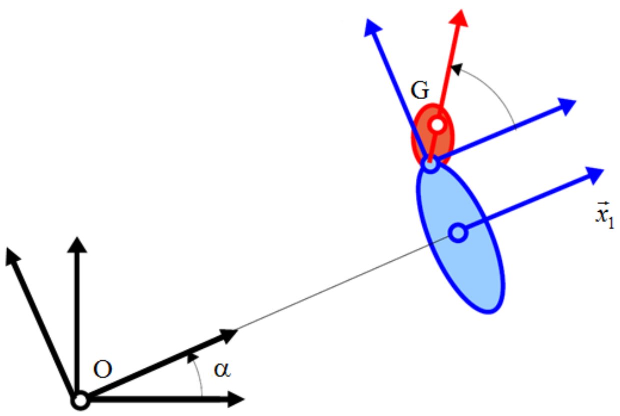

Figure 2 : *Modèle cinématique de la catapulte et d'un passager*

- On associe au sol le repère R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}, \vec{z}$)
- Le repère R_0 (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) est attaché au rail incliné d'un angle α constant avec α = ($\vec{x}$; $\overrightarrow{x_0}$,)
- R_1 (O_1, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}$) est le repère attaché à la catapulte.
- Les repères R1 et R0 sont en translation l'un par rapport à l'autre. On note $\overrightarrow{OO_1}$= λ(t) · $\overrightarrow{x_1}$
- Le corps du passager est immobile par rapport à la catapulte par contre la tête peut pivoter. On associe le repère R_2 (O_2, $\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}$) à la tête du passager avec β = ($\overrightarrow{x_1}$; $\overrightarrow{x_2}$) dépendant du temps. Le centre de gravité de la tête est défini par $\overrightarrow{O_2G} = a_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$. On a également : $\overrightarrow{O_1O_2} = a_1 \cdot \overrightarrow{x_1} + b_1 \cdot \overrightarrow{y_1}$

Question 1 : Compléter la Figure 2 en faisant apparaître les points et repères manquants. Exprimer les vecteurs taux de rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Question 2 : Calculer les vecteurs vitesses instantanées $\vec{V}(O_2/0)$ et $\vec{V}(G/0)$

Question 3 : En déduire l'accélération $\vec{a}(G/0)$

On imagine le cas le plus défavorable en supposant que l'accélération maximale du cahier des charges est supportée par le terme de l'accélération projetée sur y_2. Le corps humain peut supporter des accélérations angulaires jusqu'à 80 rad. s^{-2}. On prendra a_2 = 0.17m.

Question 4 : Montrer que la spécification de non-dépassement des capacités humaines est vérifiée.

Exercice 2 : Hélicoptère

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par un critère simple : la vitesse en bout de pale ne doit pas dépasser la vitesse du son. On souhaite déterminer la vitesse maximale théorique d'un hélicoptère. On considère un hélicoptère 1 se déplaçant `a la vitesse horizontale $\overrightarrow{V_{1/0}} = V \cdot \overrightarrow{x_0}$constante par rapport au sol 0. Soit R_0 (O, $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) un repère fixe par rapport au sol et R_1 (A, $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}$) un repère fixe par rapport à l'hélicoptère, où A est le point au centre du rotor (figure 4). On note $\overrightarrow{OA} = h \cdot \overrightarrow{z_0} + \lambda(t) \cdot \overrightarrow{x_0}$

Figure 3: *Un hélicoptère*

Le rotor principal 2 de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit R_2 (A, $\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}$) un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe (A, $\overrightarrow{z_0}$). On note la vitesse constante du rotor par rapport à l'hélicoptère $\omega=\dot{\theta}$. Soit M le point situé à l'extrémité´ d'une pale. $\overrightarrow{x_2}$ est choisi tel que $\overrightarrow{AM} = R \cdot \overrightarrow{x_2}$

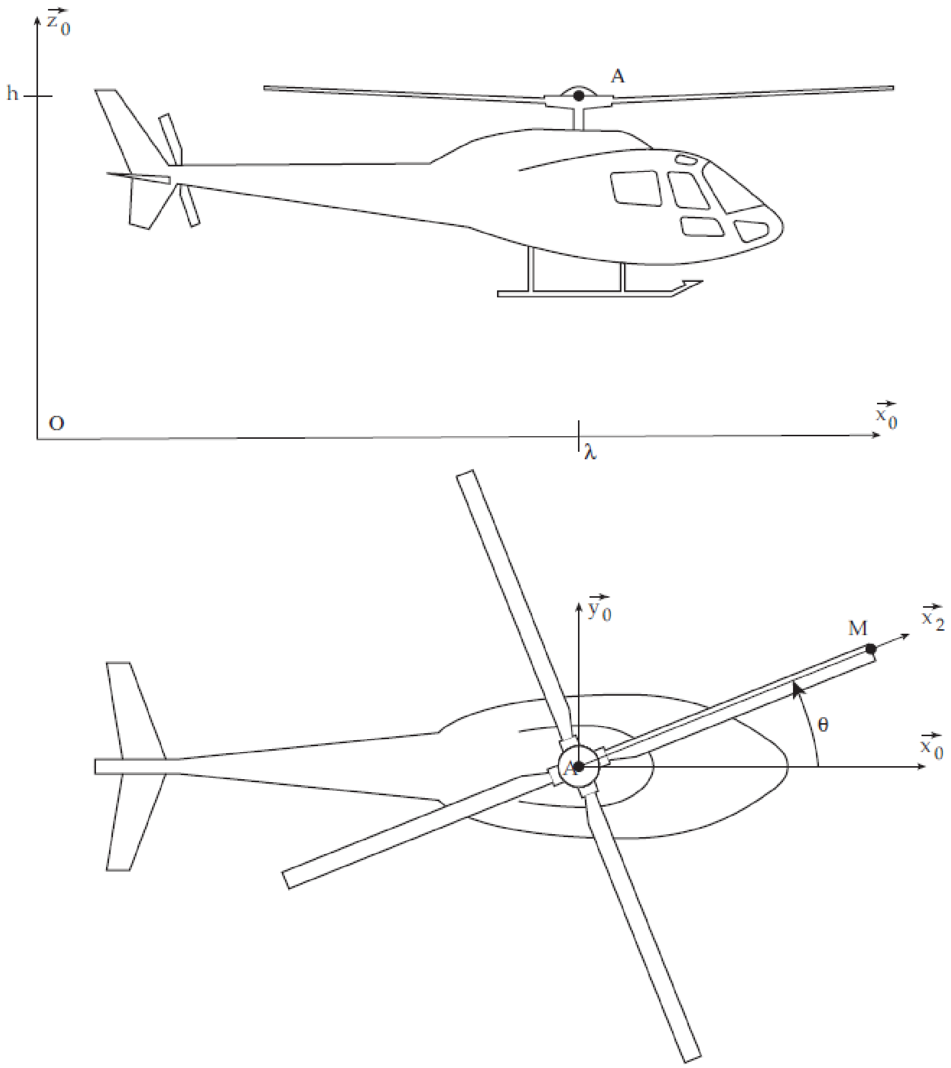

Figure 4 : *Schématisation du problème*

Question 1 : Déterminer le vecteur position du point M dans le référentiel R_0

Question 2 : Donner les vitesses $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

Question 3 : Déterminer le vecteur vitesse du point M du rotor 2 par rapport au sol 0 par dérivation du vecteur position.

Question 4 : Calculer $\vec{V}(M/0)$ en utilisant la formule de changement de point.

Question 5 : Déterminer l'expression de la vitesse maximal V_{max} en M de 2/0 au cours du mouvement en fonction de V, ω et R, en précisant pour quel position ce maximum est atteint.

Question 6 : Sachant que la vitesse du rotor vaut ω = 384 tr/min, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut R = 4.5 m et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale V de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en km/h ; on suppose qu'il n'y a pas de vent).

Exercice 3 : Robot ABB

La société ABB conçoit et réalise des robots de manutention (figure 5). Ce robot admet différents types d'outils à son extrémité. Pour manipuler des objets légers et fragiles, on utilise une ventouse reliée à une pompe à vide. Pour des raisons de cadence, les mouvements du robot sont rapides. Mais des mouvements trop brusques peuvent entraîner un glissement de l'objet sur la ventouse, voire sa chute. Le cas le plus défavorables est généralement sur l'axe vertical, lorsque les effets d'inertie se cumulent au poids de l'objet. On admet qu'un calcul d'efforts au niveau de la ventouse a permis de fixer l'accélération verticale maximale à *3.g*.

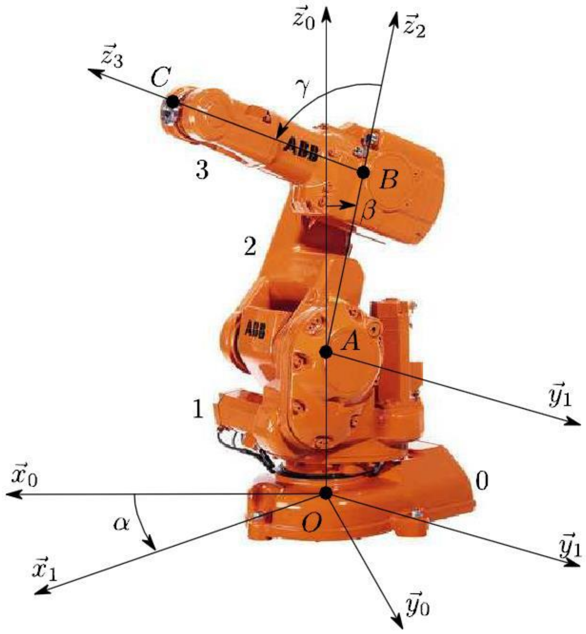

Figure 5 : *Exemple de robot ABB*

Le robot repose sur un socle *0* et comporte quatre bras : *1*, *2*, *3* et *4* en rotation les uns par rapport aux autres. Le paramétrage tridimensionnel est donné Figure 5. Un schéma cinématique dans le plan est donné Figure 6. Attention, les angles ne sont pas tous positifs sur le dessin.

- On supposera dans cette partie que *4* est immobile par rapport à *3*.
- *1* est en rotation par rapport à *0* autour de l'axe (O, $\overrightarrow{z_0}$)paramétrée par α.
- *2* est en rotation par rapport à *1* autour de l'axe (A, $\overrightarrow{y_1}$) paramétrée par β.
- *3* est en rotation par rapport à *2* autour de l'axe (B, $\overrightarrow{y_1}$) paramétrée par γ.

On donne : OA = h = 0.4 m, AB = H = 1 m et BC = L = 1 m.

Objectif : Vérifier que l'accélération verticale maximale du point *C* par rapport à R_0 est inférieure à *3.g*

Question 1 : Construire les figures planes de repérage/paramétrage (figures de calcul), puis indiquer sous chacune de ces figures l'expression des vecteurs rotation correspondante.

Question 2 : Exprimer le vecteur position du point *C* par rapport à R_0

Question 3 : Calculer la vitesse $\vec{V}(C/0)$ en fonction des vitesses de rotation de chacun des bras et des paramètres de la géométrie.

Question 4 : Calculer la composante verticale de l'accélération $\vec{a}(C/0)$ en fonction des vitesses et accélérations de chacun des bras et des paramètres de la géométrie.

Question 5 : Faites l'application numérique en utilisant les données suivantes et conclure sur le risque de glissement de l'objet.

Données :

- $\alpha = \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$
- $\beta = 45°$, $\dot{\beta} = 2\, rad.s^{-1} =$ et $\ddot{\beta} = -10\, rad.s^{-2}$,
- $\gamma = 60°$, $\dot{\gamma} = 1\, rad.s^{-1} =$ et $\ddot{\gamma} = -5\, rad.s^{-2}$,

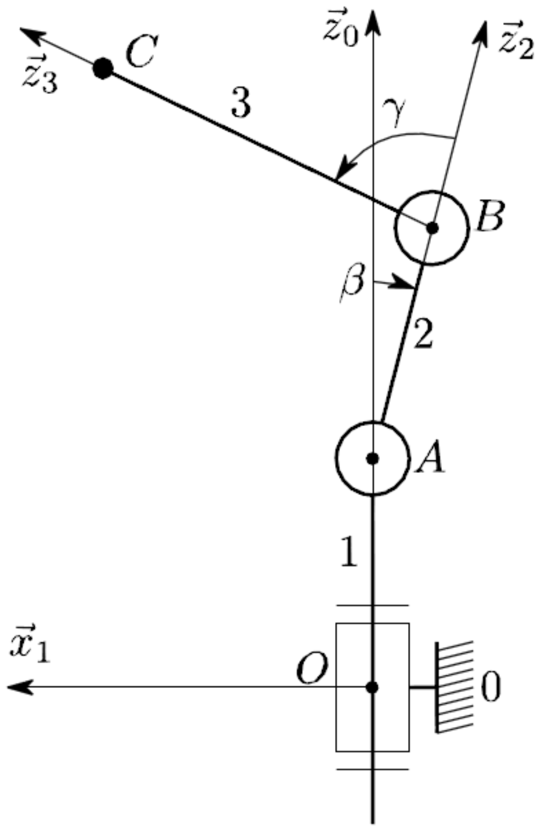

Figure 6 : *Schématisation du problème*

Exercice 4 : Eolienne

On s'intéresse à une éolienne de petite puissance (*18 kW*) représentée sous forme de schéma cinématique de la Figure 7. Ce système est constitué de trois solides :

- Le mat *0* de repère associé R_0 $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, fixe par rapport au sol
- La girouette *1* a la faculté de pouvoir tourner par rapport au mat *0* autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$. Soit R_1 $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ le repère associé à la girouette *1*, on pose : $\alpha = (\overrightarrow{x_0}; \overrightarrow{x_1})$
- Les pales *2* possèdent la faculté de pouvoir tourner par rapport à la girouette *1* autour de l'axe $(B, \overrightarrow{x_1})$. Soit R_2 $(O, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ le repère associé aux pales *2*. On pose $\theta = (\overrightarrow{z_1}; \overrightarrow{z_2})$ et $\overrightarrow{OB} = a \cdot \overrightarrow{x_1}$

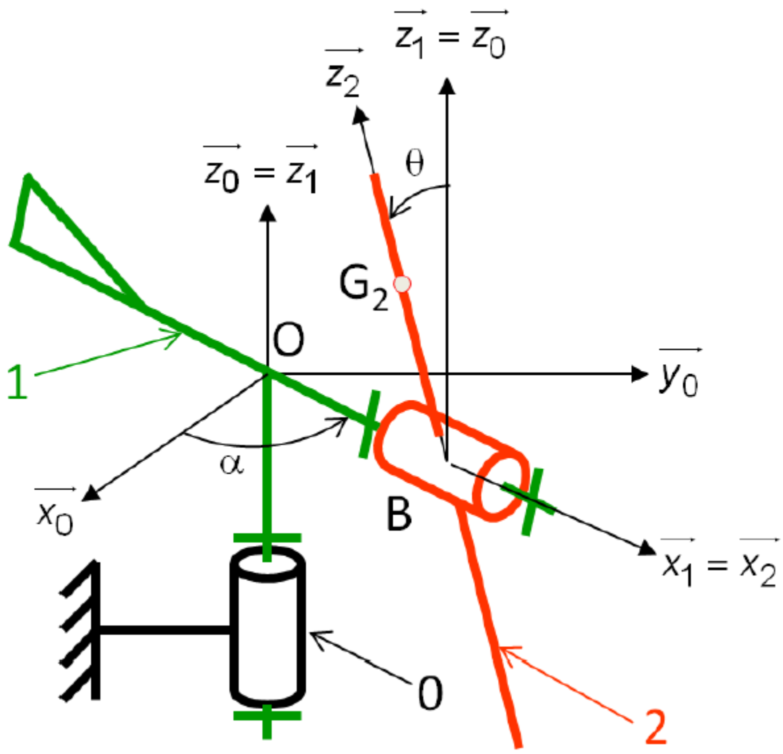

Figure 7 : *Schéma cinématique de l'éolienne*

Si un corps étranger percute une pale au point de l'endommager et de créer un « balourd » (centre de gravité G_2 des pâles qui n'est plus sur l'axe de rotation des pâles), des effets dynamiques (vibrations) peuvent apparaitre et être à l'origine d'efforts qui vont user anormalement certaines pièces du système. Dans ce cas, la position du centre de gravité G_2 des pâles *2* est défini par : $\overrightarrow{OG_2} = b \cdot \overrightarrow{z_2}$ (*b* est une constante positive)

Objectif : déterminer, dans le but quantifier les efforts dus aux effets dynamiques, le vecteur accélération du centre de gravité G_2 des pâles dans leur mouvement par rapport au sol.

Question 1 : Donner la nature des mouvements de 1 par rapport à 0 et de 2 par rapport à 1.

Question 2 : En déduire les trajectoires de B par rapport à 0 et de G_2 par rapport à 1

Question 3 : Dessiner les deux figures de changement de bases.

Question 4 : Indiquer sous chacune de ces figures l'expression des vecteurs rotations correspondants.

Question 5 : En déduire l'expression de $\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$.

Question 6 : Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(G_2/0)$

Question 7 : Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}(G_2/0)$