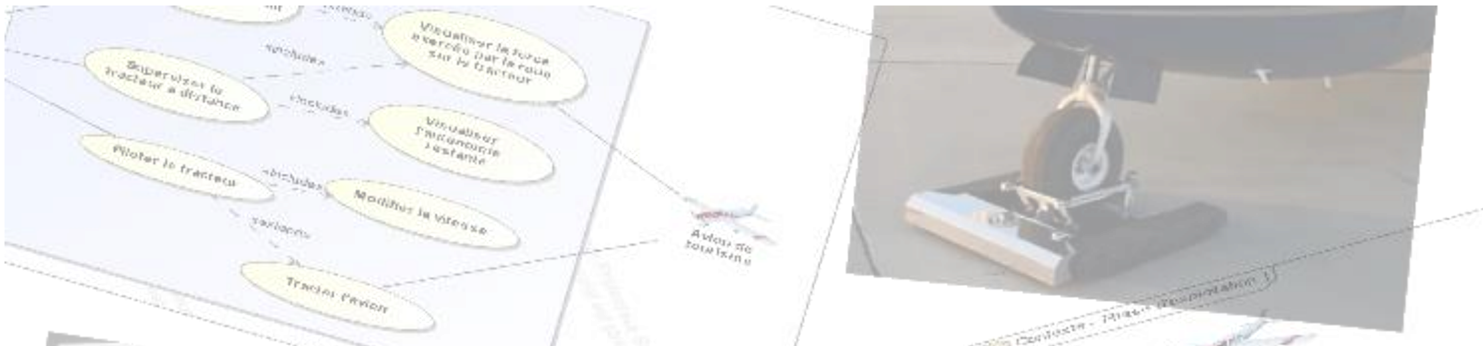


SEQUENCE III

Cinématique des solides indéformables

Objectifs :
- ✓ *Proposer un modèle cinématique*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un point*
- ✓ *Caractériser le mouvement d'un solide*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 3 – Chap. 3

Chapitre 3

Cours

Calculer vitesse et accélération d'un point d'un solide

Prérequis
- ✓ *Aucun*

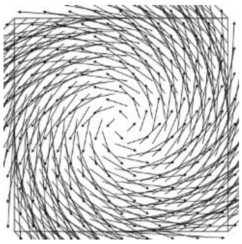
Objectifs
- ✓ *Définir un solide indéformable*
- ✓ *Déterminer les degrés de libertés d'un solide*
- ✓ *Déterminer le torseur cinématique d'un solide*
- ✓ *Calculer vitesses et accélération d'un point d'un solide*

Savoir-faire associés

M.II.(6 et 8)

PLAN DU CHAPITRE

I. Paramétrage d'un solide indéformable....... 2
   A. Solide indéformable....................2
   B. Paramétrage de la position et de l'orientation. 3
II. Mouvement d'un solide par rapport à un référentiel................ 6
   A. Les degrés de libertés....................6
   B. Vecteurs vitesses d'un point d'un solide 6
   C. Champ de vecteurs vitesses d'un solide...............7
   D. Accélération d'un point d'un solide................10
   E. Mouvements particuliers....................11
III. Composition de mouvements :..................... 13



Exemple de champs de vitesse

I. Paramétrage d'un solide indéformable

A. Solide indéformable

1. Définition

Le cours de mécanique des deux années de CPGE est consacré aux seuls solides indéformables. Cette hypothèse est bien entendu une approximation car aucun matériau n'est infiniment rigide mais elle est toutefois très raisonnable lorsque les déformations locales des pièces restent faibles par rapport à leurs déplacements macroscopiques.

Définition 1 – Solide indéformable : Un solide indéformable est un système matériel (S) tel que, pour tout bipoint (A, B) de (S), la distance $\|\overrightarrow{AB}\|$ entre A et B reste constante au cours du temps

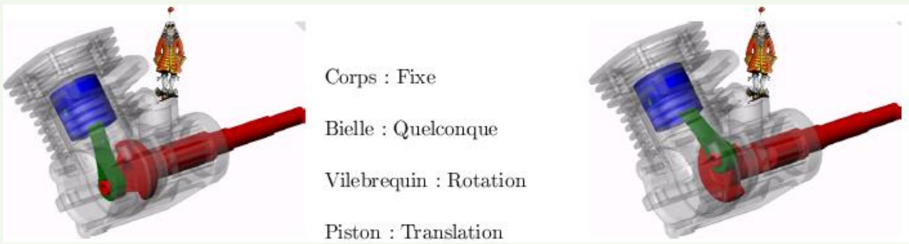
Figure 1 : *Exemple de solide indéformable*

2. Équivalence solide – repère

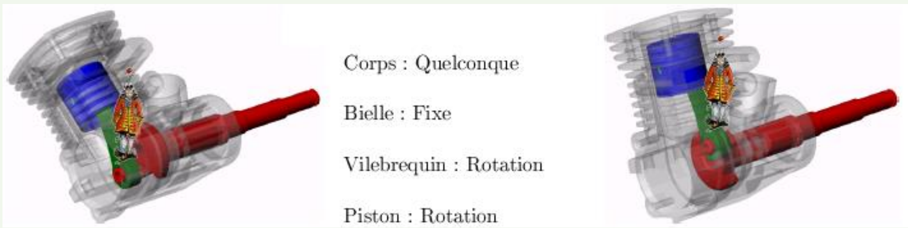
Pour paramétrer un problème de mécanique, un repère R_s est associé à chaque solide (S). Les solides étudiés étant indéformables, ce repère est fixe au cours du temps par rapport au solide et tous les points du solide ont une position fixe au cours du temps dans ce repère. Tout changement de position ou d'orientation du solide entraîne les mêmes changements sur le repère associé. Ainsi, pour étudier l'évolution d'un solide (S) par rapport à un solide de référence auquel est associé le repère R_f, il est possible de décrire l'évolution du repère R_s associé au solide (S) par rapport au repère R_f.

Exemple 1 - Micromoteur :

Référentiel lié au bâti :



Référentiel lié à la bielle :



3. Définition de la position et l'orientation

Pour étudier les mouvements d'un solide (S) par rapport à un référentiel R_f, il est indispensable de connaître le nombre de paramètres dont il faut suivre l'évolution. Pour définir la position et l'orientation d'un solide indéformable (S) par rapport à un référentiel R_f, il faut six paramètres indépendants car cette définition peut être faite par le positionnement particulier de trois points non alignés du solide (S) par rapport au repère R_f, Figure 2.

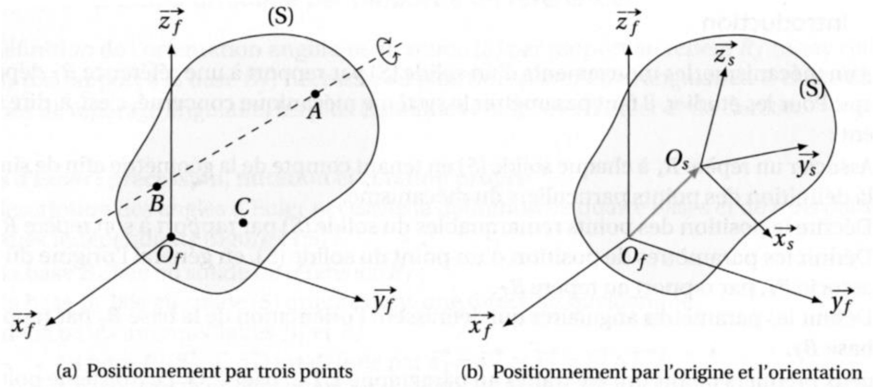


Figure 2 : *Définition de la position et de l'orientation d'un solide.*

Définir la position et l'orientation d'un solide (S) par rapport à un repère R_f par la donnée de trois points n'est pas pratique : c'est pourquoi cette définition sera systématiquement faite à partir du repère R_s associé au solide, ce qui passe par le paramétrage de :

- La position d'un point du solide (S) (souvent l'origine O_s de la base B_s) par rapport à un point fixe du repère R_f (souvent son origine O_f) par aux plus trois paramètres de longueur ;
- L'orientation de la base B_s par rapport à la base B_f par aux plus trois paramètres angulaires.

Les variations temporelles des six paramètres (trois longueurs + trois angles) correspondent aux possibilités de mouvement du solide (S) par rapport au référentiel R_f.

B. Paramétrage de la position et de l'orientation

1. Introduction

Dans un mécanisme, les mouvements d'un solide (S) par rapport à une référence R_f dépendent du temps. Pour les étudier, il faut paramétrer le système mécanique concerné, c'est-à-dire successivement :

- Associer un repère R_s à chaque solide (S) en tenant compte de la géométrie afin de simplifier la définition des points particuliers du mécanisme ;
- Décrire la position des points remarquables du solide (S) par rapport à un repère R_s ;
- Définir les paramètres de position d'un point du solide (S), en général l'origine du repère associé R_s, par rapport au repère R_f ;
- Définir les paramètres angulaires qui définissent l'orientation de la base B_s par rapport à la base B_f .

2. Position d'un point d'un solide

La position d'un point M d'un solide (S) par rapport à un repère R_f est repérée par trois paramètres indépendants qui définissent le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M du solide (S) par rapport au repère R_f, par exemple sous la forme $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$. Il est très rare, en Sciences Industrielles de l'Ingénieur, d'utiliser ces projections : en effet, dans les applications abordées, les solides sont en contact les uns avec les autres par des liaisons et il est alors possible de définir le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en utilisant les repères associés aux solides intermédiaires, par exemple sous la forme $\overrightarrow{O_fM} = \overrightarrow{O_fO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ (Figure 3).

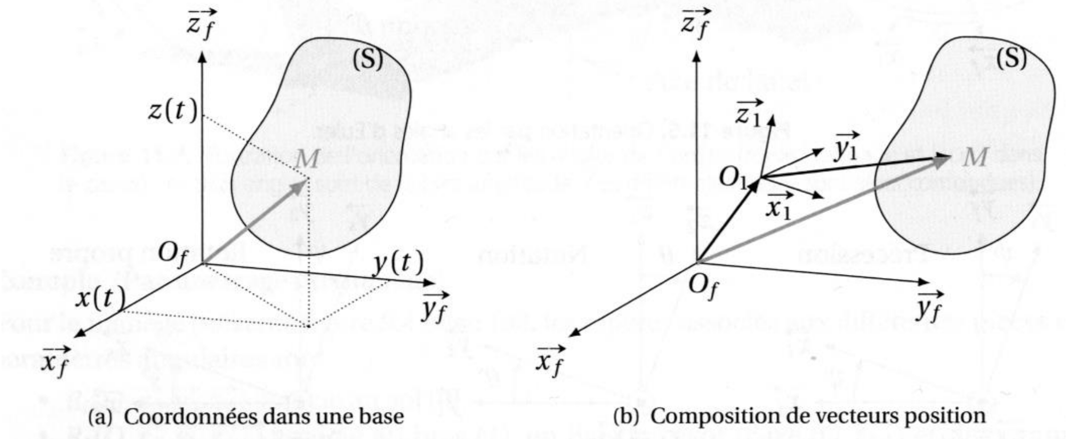


Figure 3 : *Position d'un solide par rapport à un référentiel.*

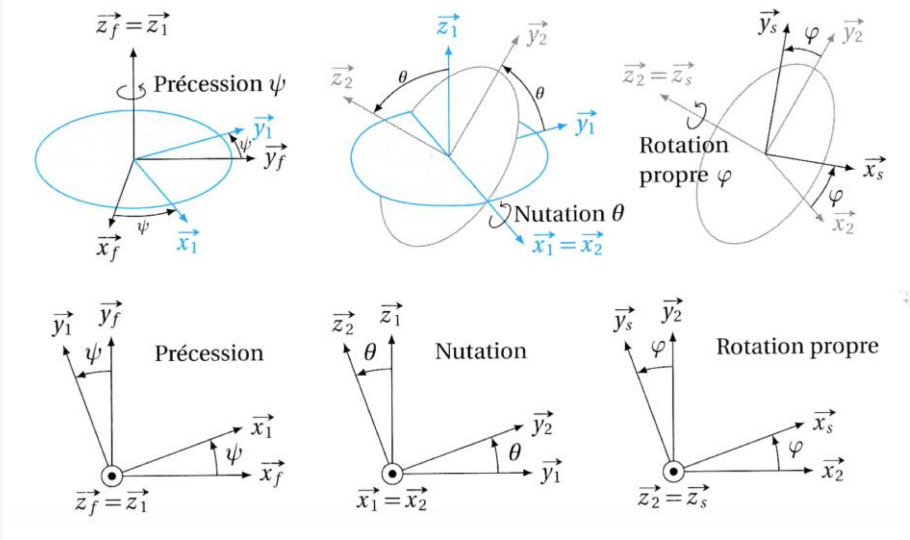
3. Orientation d'un solide par rapport à un référentiel

La définition de l'orientation angulaire du solide (S) par rapport au repère R_f (donc celle de la base B_s par rapport à la base B_f) nécessite au moins trois paramètres angulaires. Il existe plusieurs systèmes de repérage angulaire, les plus classiques étant ceux d'Euler et de Cardan.

Exemple 2 – Orientation d'un solide par les angles d'Euler :

Les trois angles d'Euler correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x_f}, \vec{y_f}, \vec{z_f})$ avec la base $(\vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$.

- La première rotation d'angle ψ, autour de l'axe $\vec{z_f}$ permet de passer à une première base intermédiaire $(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$. L'angle ψ est appelé « angle de précession ».
- Une seconde rotation d'angle θ, est alors appliquée autour de l'axe $\vec{x_1}$, de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$. L'angle θ est appelé « angle de nutation ».
- La dernière rotation, d'angle ϕ est appliquée autour de l'axe $\vec{z_2}$ de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\vec{x_s}, \vec{y_s}, \vec{z_s})$. L'angle ϕ est appelé « angle de rotation propre ».



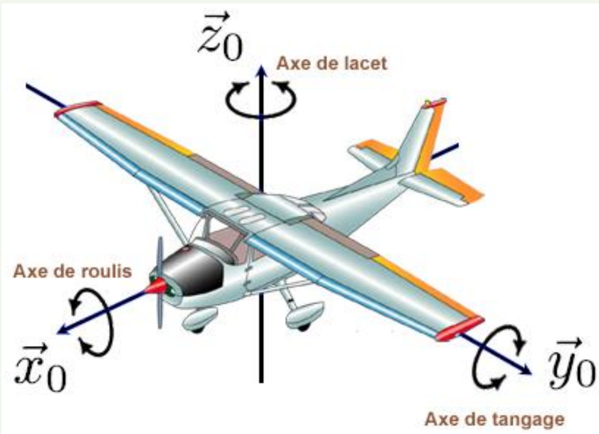
En Sciences de l'Ingénieur, l'étude des mécanismes nécessite plus rarement ce type de paramétrage car les mécanismes possèdent des liaisons qui guident généralement les rotations : il est alors naturel de s'appuyer sur ces liaisons pour paramétrer les rotations.

Dans certaines situations néanmoins, l'absence de liaison conduit à utiliser un paramétrage similaire à celui d'Euler. On peut citer par exemple le cas de l'orientation d'un avion, d'un bateau ou de tout autre véhicule (on parle alors des angles de lacet, de roulis et de tangage).

Exemple 3 – Orientation d'un solide par les angles de Cardan :

Les trois angles de Cardan (roulis, tangage, lacet) correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ avec la base $(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$.

- La première rotation d'angle α, autour de l'axe $\overrightarrow{x_0}$ permet de passer à une première base intermédiaire $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. L'angle α est appelé « angle de roulis ».
- Une seconde rotation d'angle β, est alors appliquée autour de l'axe $\overrightarrow{y_1}$, de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une seconde base intermédiaire $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.. L'angle β est appelé « angle de tangage ».
- La dernière rotation, d'angle γ est appliquée autour de l'axe $\overrightarrow{z_2}$ de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. L'angle γ est appelé « angle de lacet ».



II. Mouvement d'un solide par rapport à un référentiel

A. Les degrés de libertés

Les variations temporelles des six paramètres de positionnement d'un solide (S) par rapport à un référentiel R_f engendrent six mouvements élémentaires indépendants. Ces mouvements définissent la cinématique du solide (S) par rapport au référentiel R_f .

> **Définition 2 – Degrés de liberté :** Le nombre de degrés de liberté d'un solide (S) par rapport à un référentiel R_f représente le nombre de mouvements élémentaires indépendants existants entre (S) et R_f.

Le nombre maximal de degrés de liberté (DDL) est de six, Figure 4, qui correspondent à :

- **Trois mouvements de translation :** T_x , T_y et T_z qui correspondent aux variations temporelles des paramètres dimensionnels.
- **Trois mouvements de rotation :** R_x , R_y et R_z qui correspondent aux variations temporelles des paramètres angulaires.

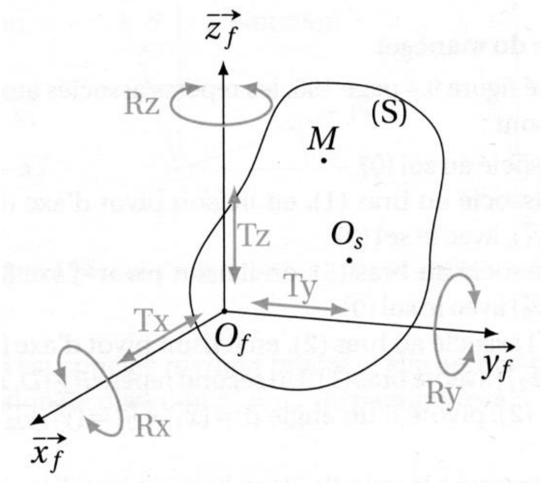


Figure 4 : *Définition des 6 degrés de liberté*

B. Vecteurs vitesses d'un point d'un solide

> **Définition 3 – Vitesse :** La vitesse d'un point M appartenant au solide (S) dans son mouvement par rapport au référentiel R_f est définie par la variation du vecteur position par rapport au temps dans la base de référence B_f :et notée :
>
> $$\vec{V}(M \in S/R_f) = \vec{V}(M, S/R_f) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_f M}}{dt}\right|_{R_f}$$

Définition 4 – Vitesse angulaire : Les variations temporelles des paramètres angulaires d'orientation de la base B_s associée au repère R_s par rapport à la base B_f associée au repère R_f caractérisent le vecteur vitesse angulaire (ou vitesse de rotation) du solide (S) par rapport au référentiel R_f, noté $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{B_f/B_s}}$.

C. Champ de vecteurs vitesses d'un solide

Définition 5 – Mouvement de solide : Les vecteurs $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S}/\mathbf{R_f})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{B_f/B_s}}$. caractérisent le mouvement du solide (S) par rapport au référentiel Rf. Le solide étant indéformable, il est possible de définir la vitesse du mouvement (S) par rapport au repère R_f en tout point M.

Définition 6 – Champs de vecteurs vitesses : L'ensemble des vecteurs vitesses $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M} \in \mathbf{S}/\mathbf{R_f})$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{B_f/B_s}}$. du solide (S) par rapport au référentiel R_f au point M définit le champ des vecteurs vitesses de (S) par rapport à R_f.

Soient A et B deux points appartenant au même solide S. La dérivée du vecteur position peut être calculée de deux façon :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{B_f} = \left.\frac{d(\overrightarrow{AO_f} + \overrightarrow{O_fB})}{dt}\right|_{B_f}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{B_f} = -\left.\frac{d(\overrightarrow{O_fA})}{dt}\right|_{B_f} + \left.\frac{d(\overrightarrow{O_fB})}{dt}\right|_{B_f}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{B_f} = -\vec{V}(A \in S/R_f) + \vec{V}(B \in S/R_f)$$

Le vecteur étant un vecteur fixe par rapport à (S) :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_{B_f} = \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Au final, on a :

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{AB} = -\vec{V}(A \in S/R_f) + \vec{V}(B \in S/R_f)$$

Soit :

$$\vec{V}(B \in S/R_f) = \vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

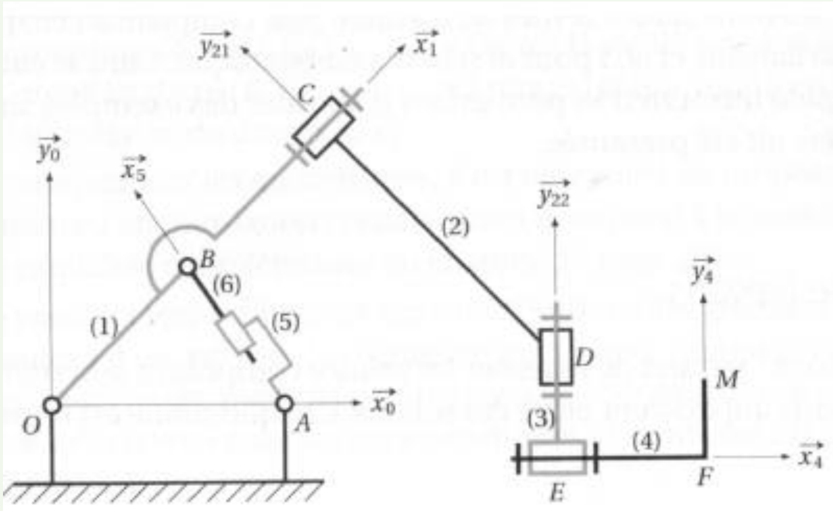
Ou encore :

$$\vec{V}(B \in S/R_f) = \vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$$

Propriété 1 – Formule de Varignon : Soient A et B deux points appartenant au même solide S. D'après la formule de Varignon, ou de changement de point, on peut exprimer la vitesse du point B en fonction de la vitesse du point A et du vecteur de vitesse de rotation entre S et R_f :

$$\vec{V}(B \in S/R_f) = \vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$$

Exemple 4 – Manège à sensation forte : Déterminer la vitesse du point M centre de l'oreille interne d'un passager assis sur le bras (4) dans son mouvement par rapport à la tourelle (3) : $\vec{V}(M \in 4/3)$



Le vecteur position du point M du passager (4) par rapport à la tourelle (3) est $\overrightarrow{FM} = h \cdot \vec{y_4}$ car le point F appartient à l'axe de rotation (E, $\vec{x_4}$) entre le bras (4) et la tourelle (3). La vitesse du point F appartenant au bras (4) par rapport à la tourelle (3) vaut $\vec{V}(F \in 4/3)$=0. La formule de changement de point donne :

$$\vec{V}(M \in S/R_f) = \vec{V}(F \in S/R_f) + \overrightarrow{MF} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/3}}$$
$$\vec{V}(M \in S/R_f) = \vec{0} - h \cdot \vec{y_4} \wedge \dot{\varphi} \cdot \vec{x_4}$$
$$\vec{V}(M \in S/R_f) = h \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{z_4}$$

Soit A et B, deux points d'un solide (S), d'après la définition du solide indéformable, on a :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = Cste$$

On a ainsi :

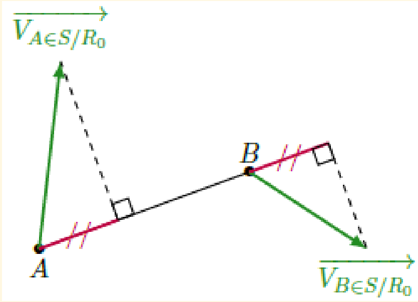
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = Cste$$

En dérivant cette expression, on a :

$$2 \cdot \overrightarrow{AB}.\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right|_R = 0$$
$$2 \cdot \overrightarrow{AB}.\left.\frac{d(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})}{dt}\right|_R = 0$$
$$-\overrightarrow{AB}.\left.\frac{d\left(\overrightarrow{OA}\right)}{dt}\right|_R + \overrightarrow{AB}.\left.\frac{d\left(\overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right|_R = 0$$
$$\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A \in S/R) = \overrightarrow{AB}.\vec{V}(B \in S/R)$$

<u>Propriété 2 – Equiprojectivité :</u> Le champ des vecteurs vitesse est équiprojectif, c'est-à-dire qu'il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A \in S/R) = \overrightarrow{AB}.\vec{V}(B \in S/R)$$



Les propriétés de champ de moment équiprojectif et la formule de changement de point sont des éléments caractéristiques d'un outils mathématique nommé torseur. Dans le cas de la cinématique, il s'agit du torseur cinématique du solide (S) dans son mouvement par rapport au référentiel R_f, qui caractérise le mouvement du solide (S) par rapport à R_f.

<u>Définition 7 – Torseur cinématique :</u> Le torseur cinématique du solide (S) par rapport au référentiel R_f au point M est noté :

$$\{\mathcal{V}(S/R_f)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \\ \vec{V}(M \in S/R) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \\ \vec{V}(N \in S/R) \end{Bmatrix}_N$$

Ce torseur cinématique est défini en tout point M de l'espace par deux vecteurs appelés éléments de réduction du torseur :

- $\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$ est appelée résultante du torseur cinématique par rapport à R_f
- $\vec{V}(M \in S/R)$ est appelée moment en M du torseur cinématique par rapport à R_f.

Le champ de vecteurs vitesse est équiprojectif et défini pour tout point de l'espace. La formule de changement de point permet de trouver la relation entre les vitesses en deux points M et N dans le mouvement du solide (S) par rapport au référentiel R_f.

<u>Propriété 3 – Notation :</u> Pour définir le torseur cinématique du solide (S) par rapport à Rf en un point A de l'espace, il est possible de l'écrire au choix :
Sous forme vectorielle :

$$\{\mathcal{V}(S/R_f)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \cdot \vec{x} + \omega_y \cdot \vec{y} + \omega_z \cdot \vec{z} \\ v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} + v_z \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_M$$

Sous forme projetée dans une base B_f :

$$\{\mathcal{V}(S/R_f)\} = \left\{\begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix}\right\}_M$$

D. Accélération d'un point d'un solide

Définition 8 – Accélération : Par définition, l'accélération d'un point M par rapport à un référentiel Rf est égale à la dérivée du vecteur vitesse dans ce même repère R_f :

$$\vec{a}(M \in S/R_f) = \left.\frac{d\vec{V}(M \in S/R_f)}{dt}\right|_{R_f}$$

Soient A et B deux points appartenant au même solide S de repère mobile R. La dérivée du vecteur vitesse dans le repère fixe R_f peut être calculée de deux façon :

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \left.\frac{d\vec{V}(B \in S/R_f)}{dt}\right|_{R_f}$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \left.\frac{d\vec{V}(B \in S/R_f)}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \vec{V}(B \in S/R_f)$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \left.\frac{d(\vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}})}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge (\vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}})$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \left.\frac{d\vec{V}(A \in S/R_f)}{dt}\right|_{R} + \left.\frac{d\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \left.\frac{d\vec{V}(A \in S/R_f)}{dt}\right|_{R} + \left.\frac{d\overrightarrow{BA}}{dt}\right|_{R} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \vec{V}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = [\left.\frac{d\vec{V}(A \in S/R_f)}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \vec{V}(A \in S/R_f)] + \vec{0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$$

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \vec{a}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Propriété 4 – Formule de changement de point : Soient A et B deux points appartenant au même solide S. D'après la formule de changement de point, on peut exprimer l'accélération du point B en fonction de celle du point A :

$$\boldsymbol{\vec{a}(B \in S/R_f) = \vec{a}(A \in S/R_f) + \overrightarrow{BA} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}}{dt}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

E. Mouvements particuliers

1. Mouvement de translation :

Définition 9 – Translation : Un solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à un repère R_f, si deux vecteurs non parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ d'un même solide (S) restent constant en direction, en sens et en norme au cours du mouvement. Le solide ne change pas d'orientation par rapport à R_f, le vecteur vitesse de rotation est nul.

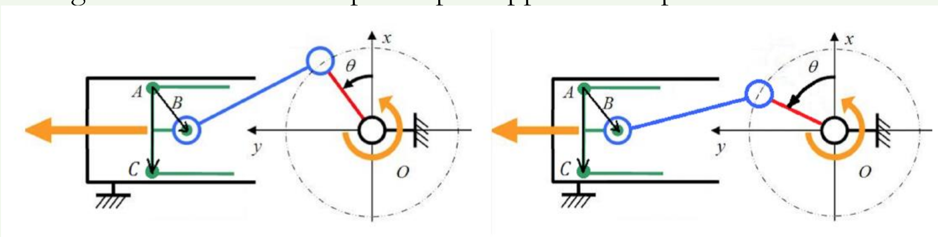
$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} = \vec{0}$$

Un mouvement de translation peut être :

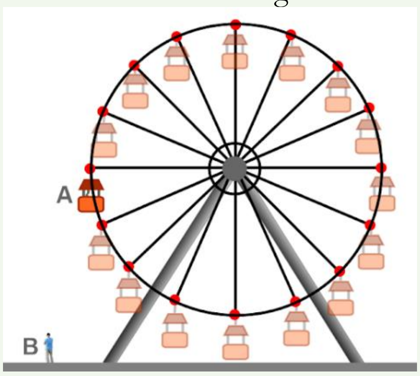
- **Rectiligne :** si la trajectoire de ces points est une droite, alors la translation est dite rectiligne. Ce mouvement caractérise une liaison rencontrée couramment en construction mécanique : la liaison glissière
- **Circulaire :** si la trajectoire des points du solide est un cercle (ou un arc de cercle), alors la translation est dite circulaire.
- **Curviligne :** si la trajectoire des points du solide est une courbe, alors la translation est dite curviligne.

Exemple 5 – Les différents mouvement de translation :

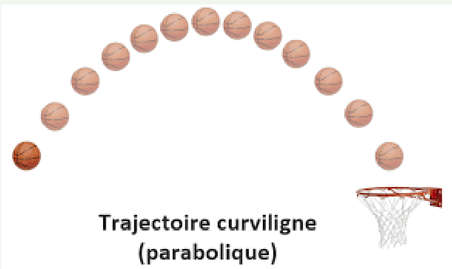
Rectiligne : Translation d'un piston par rapport au corps du vérin.



Circulaire : Mouvement d'une cabine d'une grande roue



Curviligne : Mouvement d'un tir de basket



Propriété 5 : Dans un mouvement de translation, les vecteurs vitesses et accélérations sont identiques en tous points de l'espace :

$$\vec{a}(B \in S/R_f) = \vec{a}(A \in S/R_f)$$
$$\vec{V}(B \in S/R_f) = \vec{V}(A \in S/R_f)$$

Propriété 6 - Torseur cinématique pour une translation : Si un solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport au repère R_f, alors le torseur cinématique caractérisant le mouvement de (S) par rapport à R_f s'écrit sous la forme suivante :

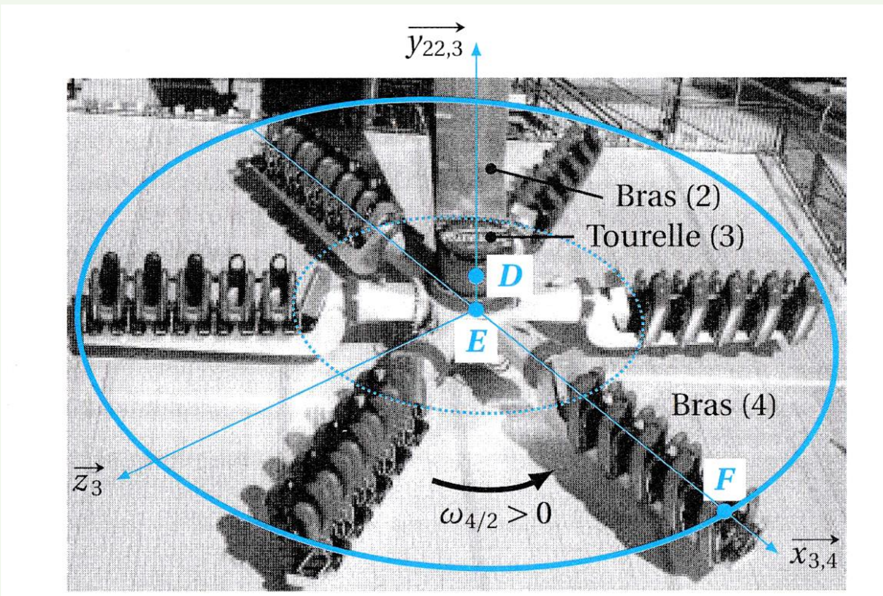
$$\{\mathcal{V}(S/R_f)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} + v_z \cdot \vec{z} \end{matrix} \right\}_M$$

Ce torseur est qualifié de torseur couple.

2. Mouvement de rotation

Définition 9 – Rotation : Un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z})$ par rapport à un repère R_f si les trajectoires de deux points A et B de (S) tels que $\overrightarrow{AB}.\vec{z} = 0$ sont deux cercles concentriques.
L'axe $(O, \vec{z})$ étant fixe par rapport au repère R_f, tous les points de cet axe ont une vitesse nulle par rapport au repère R_f.

Exemple 5 – Le mouvement de rotation :



Pour décrire au mieux le déplacement d'un solide (S) en rotation par rapport à un repère R_f, il suffit de choisir le repère R_1 lié au solide (S) tel que l'un de ses axes soit confondu avec l'un des axes du repère R et avec l'axe de rotation tout au long du mouvement. Le paramètre décrivant le mouvement du repère R par rapport au repère R_f au cours du temps sera alors l'angle de rotation entre les deux repères. Cet angle sera donc une fonction du temps.

<u>Propriété 7 - Torseur cinématique pour une rotation :</u> Si un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation par rapport au repère R_f autour de l'axe $(O, \vec{z})$ et de paramètre θ, alors le torseur cinématique caractérisant le mouvement de (S) par rapport à R_f s'écrit sous la forme suivante :

$$\{\mathcal{V}(\mathbf{S/R_f})\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z} \\ \dot{\theta} \cdot \vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathbf{OM}} \end{Bmatrix}_{\mathbf{M}}$$

Si M appartient à l'axe de rotation, alors :

$$\{\mathcal{V}(\mathbf{S/R_f})\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\mathbf{M}}$$

Ce torseur est qualifié de glisseur.

Soit un point M appartenant au solide *S* pour lequel on cherche à déterminer le vecteur-vitesse $\vec{V}(M \in S/R_f)$, il existe un point H, projection orthogonale de M sur l'axe de rotation. On a alors la relation suivante :

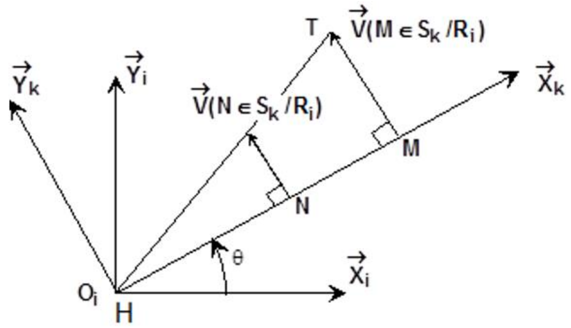
$$\vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R_f}) = \overrightarrow{\Omega_{S/R_f}} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Or $\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux. On a donc :

$$\left\|\vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{S/R_f})\right\| = \left\|\overrightarrow{\Omega_{S/R_f}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = R_M \cdot \dot{\theta}$$

R_M étant la distance du point M à l'axe de rotation du mouvement du solide *S* par rapport au repère *R*. Nous pouvons donc énoncer les conclusions suivantes :

- Le module du vecteur vitesse d'un point M, appartenant à un solide *S* en rotation par rapport au repère *R*, est proportionnel à la distance du point M à l'axe de rotation, Figure 5.
- Tous les points situés sur un cylindre de révolution en rotation autour de son axe ont des vecteurs-vitesse de même module.
- Tous les points situés sur une même génératrice parallèle à l'axe de rotation ont des vecteurs-vitesse de même direction, même sens et même module.



<u>Figure 5 :</u> *Le module de la vitesse est proportionnel à la distance du point M à l'axe de rotation*

III. Composition de mouvements :

L'objectif de cette partie est d'utiliser les mouvements élémentaires qui existent entre les différents solides d'un mécanisme afin de déterminer des vitesses angulaires ou des accélérations.

Soit un solide (S), lié à un repère $R2$, en mouvement par rapport à deux référentiels $R1$et $R0$. On souhaite établir le lien entre le champ des vecteurs vitesses du solide (S) par rapport au repère $R1$ et celui du solide (S) par rapport au repère $R0$.

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_0O_1})}{dt}\right|_{R_0} + \left.\frac{d(\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \left.\frac{d(\overrightarrow{O_1M})}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d(\overrightarrow{O_0O_1})}{dt}\right|_{R_0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \vec{V}(M \in 2/1) + \vec{V}(M \in 1/0)$$

Propriété 8 – Composition des vitesses :

$$\vec{V}(M \in 2/0) = \vec{V}(M \in 2/1) + \vec{V}(M \in 1/0)$$

Soit A et B, deux points d'un solide S :

$$\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/1) + \vec{V}(A \in 1/0)$$

$$\vec{V}(B \in 2/0) = \vec{V}(B \in 2/1) + \vec{V}(B \in 1/0)$$

En appliquant la relation du changement de point sur la relation précédente, on obtient :

$$\vec{V}(A \in 2/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{V}(A \in 2/1) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \vec{V}(A \in 1/0) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{2/0}} - \overrightarrow{\Omega_{2/1}} - \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) = \vec{0}$$

Propriété 8 – Composition des vitesses angulaires :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/0}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{2/1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}_{1/0}}$$

Propriété 9 – Composition des torseurs cinématiques (ou compositions des mouvements) :

$$\{V(\mathbf{2/0})\} = \{V(\mathbf{2/1})\} + \{V(\mathbf{1/0})\}$$