SEQUENCE V

Analyse harmonique des SLCI

Objectifs :

- ✓ *Déterminer la réponse fréquentielle d'un système*
- ✓ *Tracer le diagramme de Bode*
- ✓ *Identifier la fonction de transfert d'un système à l'aide de sa réponse fréquentielle*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 5– Chap. 1

Chapitre 1

Cours
Définir les bases de l'analyse fréquentielle

Prérequis

- ✓ *Séquence 2*

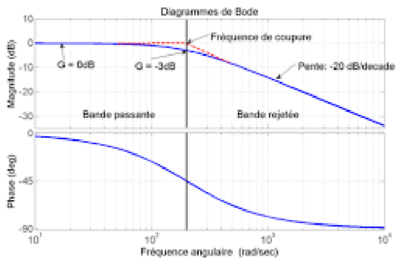
Objectifs

- ✓ *Déterminer une fonction de transfert harmonique*
- ✓ *Présenter les diagrammes de Bode*

Savoir-faire associés

R. I. 1. b / R. I. 1. c

PLAN DU CHAPITRE



Exemple de diagramme de Bode

L'objectif de l'analyse fréquentielle est d'étudier le comportement et la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque. Elle permet de prévoir son comportement en régime permanent ce qui est indispensable en phase de conception de certains systèmes.

Par ailleurs, comme cela a été mis en œuvre avec la réponse temporelle à un échelon, la réponse fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant permet aussi d'identifier sa fonction de transfert en vue de lui associer un modèle approché. Enfin, notons que l'analyse fréquentielle est également à la base des méthodes de conception des correcteurs traitées en 2ème année.

I. Représentation fréquentielle des signaux

Le signal d'entrée d'un système est rarement un signal simple (de type échelon ou rampe). La théorie développée en 1822 par Joseph Fourier propose de considérer tout signal (périodique ou non) comme la superposition d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes. Cette forme de représentation d'un signal temporel, étroitement lié à la transformée de Laplace, conduit à des propriétés intéressantes pour l'analyse du comportement des systèmes. Tout signal périodique f(t) de période T_0 (et pulsation ω_0) sur R peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t))$$

où les a_k et les b_k sont des réels.

> **<u>Définition 1 – Signal périodique :</u>** Un signal est périodique si les variations de son amplitude se reproduisent régulièrement au bout d'une période constante T_0. Un signal de période T_0 a pour fréquence $f_0 = 1/T_0$ et pour pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$.

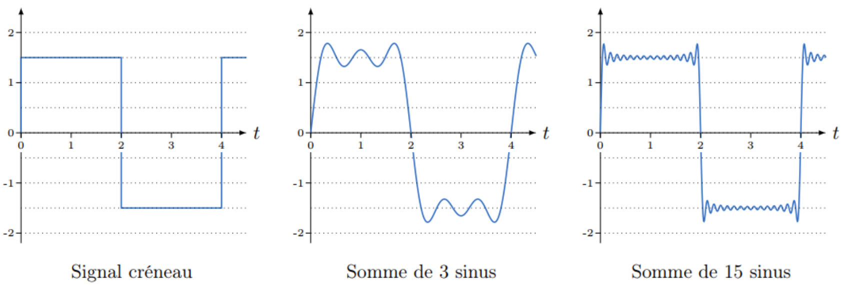


Figure 1 : *un signal créneau est approché par la somme des premiers termes de la série de Fourier.*

En exprimant les sinus et cosinus sous forme exponentielle (formule d'Euler), cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \cdot e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}$$

II. Réponse d'un SLCI à une entrée sinusoïdale

A. Analyse harmonique

L'étude harmonique d'un système linéaire, continu et invariant est l'étude de sa réponse en régime permanent (ou régime établi) à une entrée sinusoïdale d'amplitude E_0 et de pulsation ω :

$$e(t) = E_0 \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Il est possible de montrer qu'un système linéaire soumis à ce type de sollicitation sinusoïdale présentera une réponse en régime permanent sinusoïdale, de même pulsation ω, d'amplitude S_0 et avec un éventuel déphasage φ :

$$s(t) = S_0 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t) u(t) \longrightarrow \boxed{\text{SLCI}} \longrightarrow s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

Figure 2 : Représentation simplifiée du système

L'amplitude du signal de sortie S_0 et son déphasage φ (en radians) sont significatifs du comportement du système et varient en fonction de ω, Figure 4.

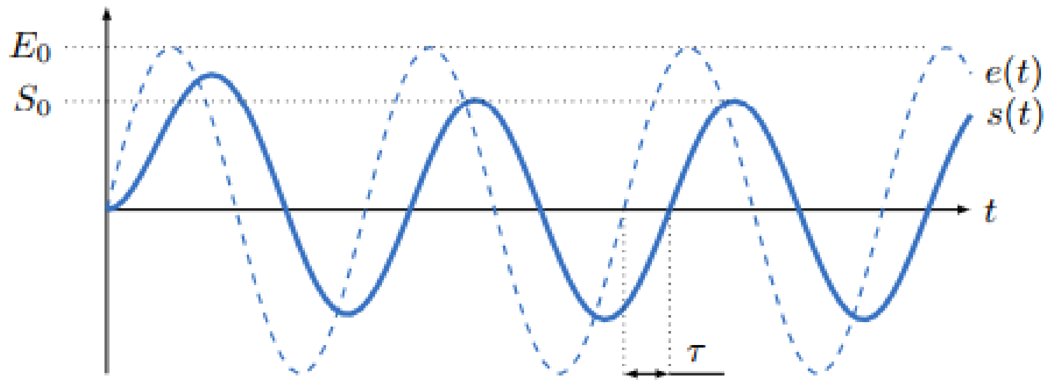


Figure 3 : Représentation temporelle de e(t) et s(t)

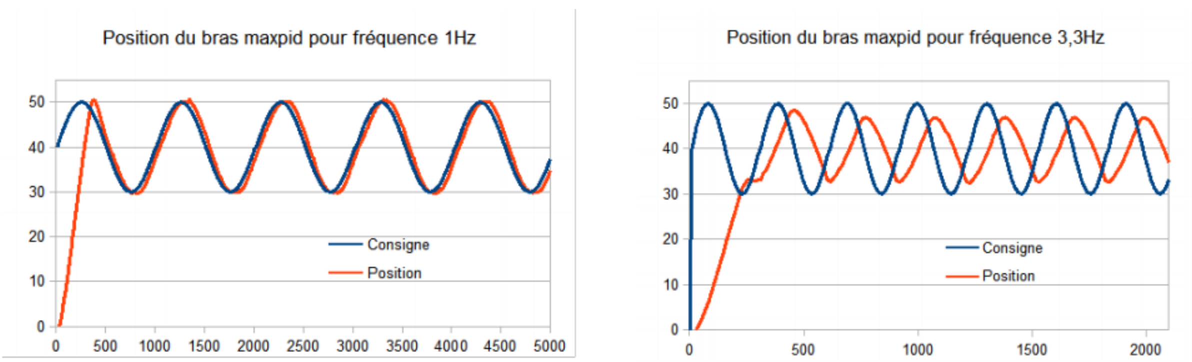


Figure 4 : Représentation temporelle pour des fréquences différentes

B. Exemple d'un système du 1er ordre

Soit un système modélisé par une fonction de transfert du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Calculons sa réponse à une entrée sinusoïdale e(t). Dans le domaine temporel :

$$e(t) = E_0 \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Dans le domaine fréquentiel, en utilisant le tableau des transformées de Laplace :

$$E(p) = E_0 \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

D'où :

$$S(p) = E_0 \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

On réalise la décomposition en éléments simples dans l'espace des réels :

$$S(p) = \frac{\alpha}{1 + \tau \cdot p} + \frac{\beta \cdot p + \gamma}{p^2 + \omega^2}$$

Après mise sous le même dénominateur et par identification du numérateur, la sortie s'exprime dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot (\frac{\tau^2}{1 + \tau \cdot p} + \frac{-\tau \cdot p + 1}{p^2 + \omega^2})$$

D'où, par transformation inverse de Laplace en utilisant le tableau des transformées de Laplace, la sortie dans le domaine temporel est :

$$s(t) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot (\tau \cdot e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega} \cdot sin(\omega \cdot t) - \tau \cdot cos(\omega \cdot t))$$

On pose :

$$tan(\varphi) = -\tau \cdot \omega$$

D'où :

$$sin(\varphi) = \frac{-\tau \cdot \omega}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

et

$$cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \cdot \omega^2}}$$

Donc :

$$s(t) = \frac{K \cdot E_0}{1 + \tau^2 \cdot \omega^2} \cdot (\tau \cdot \omega \cdot e^{-t/\tau} + sin(\omega \cdot t + \varphi))$$

La réponse temporelle à une entrée sinusoïdale d'un système du premier ordre peut donc se décomposer en deux parties :

- Un régime transitoire, en exponentielle décroissante, dont l'influence disparait quand t devient assez grand
- Un régime permanent, qualifié aussi de régime forcé car l'entrée sinusoïdale impose une sortie sinusoïdale de même pulsation.

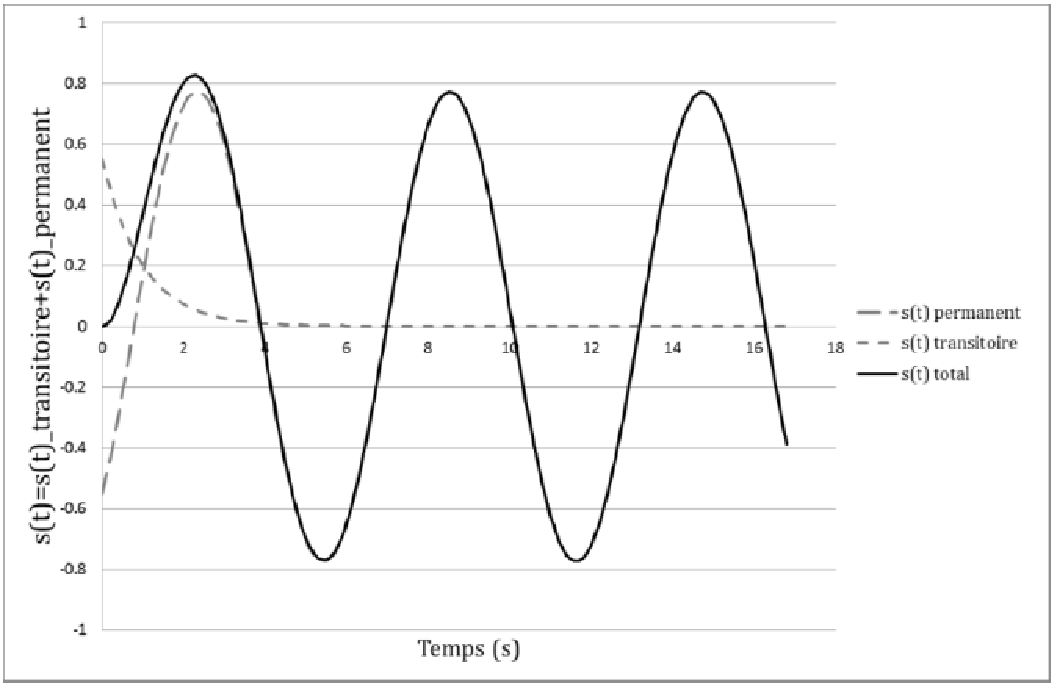


Figure 5 : *régime transitoire et permanent de la réponse*

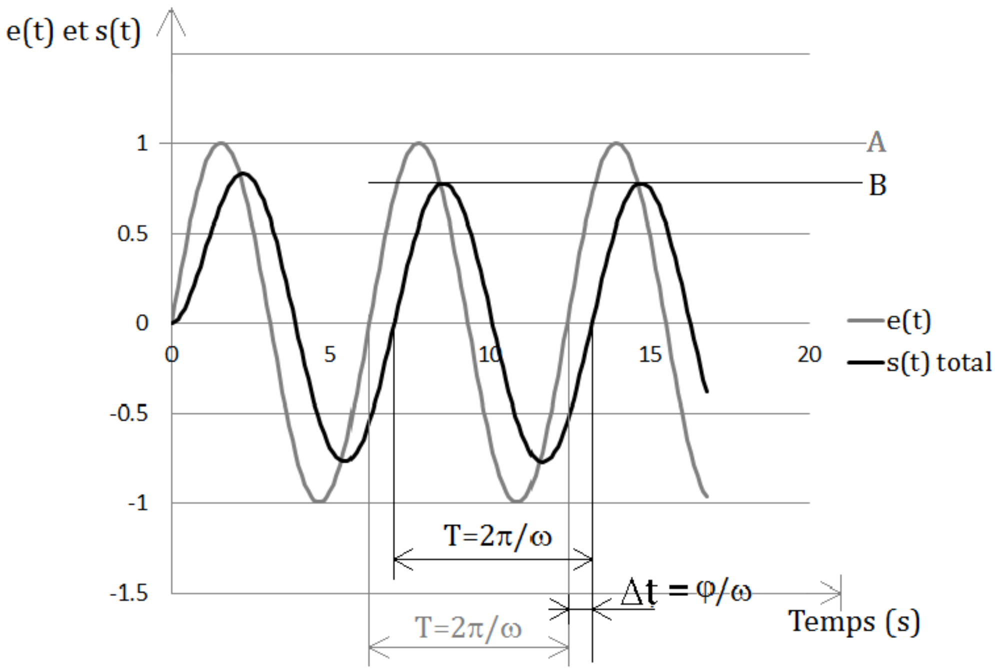


Figure 6 : *évolution de l'entrée et de la sortie en fonction du temps*

Si l'on compare l'entrée et la sortie du système, on constate qu'en régime permanent, la sortie présente la même pulsation ! que l'entrée, avec une amplitude différente S_0 et un déphasage φ.

C. Rappels mathématiques :

$$\underline{z} = a + j \cdot b = |\underline{z}| \cdot e^{j \cdot \theta} = |\underline{z}| \cdot (cos\theta + j \cdot sin\theta)$$
$$tan\theta = \frac{b}{a}$$
$$\theta = arctan(\frac{b}{a})$$
$$|\underline{z_1} \cdot \underline{z_2}| = |\underline{z_1}| \cdot |\underline{z_2}|$$
$$arg(\underline{z_1}) = arg(\underline{z_1}) + arg(\underline{z_2})$$

D. Fonction de transfert harmonique

Soit un système linéaire continu et invariant de grandeurs d'entrée e(t) et de sortie s(t) caractérisé par l'équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 \cdot e(t)$$

En se plaçant dans le domaine des complexes, on pose :

$$\underline{e} = E_0 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$$

$$\underline{s} = S_0 \cdot e^{j \cdot (\omega \cdot t + \varphi)}$$

Dans ce cas, e(t) et s(t) représentent les parties imaginaires des signaux complexes e et s. En introduisant ces variables dans l'équation différentielle générale d'un système, on obtient :

$$S_0 \cdot e^{j \cdot \varphi}(a_n \cdot (j \cdot \omega)^n \cdot \underline{s} + \ldots + a_0 \cdot \underline{s}) = E_0 \cdot (b_m \cdot (j \cdot \omega)^m \cdot \underline{e} + \ldots + b_0 \cdot \underline{e})$$

Définition 2 – Fonction de transfert harmonique : La fonction de transfert harmonique, ou complexe, est :

$$\boldsymbol{\underline{H}(j \cdot \omega) = \frac{(a_n \cdot (j \cdot \omega)^n + \ldots + a_0)}{(b_m \cdot (j \cdot \omega)^m + \ldots + b_0)} \cdot \frac{S_0 \cdot e^{j \cdot \varphi}}{E_0}}$$

Définition 3 – Amplification du système : Le rapport des amplitudes est le module de la fonction de transfert harmonique (aussi appelé gain) :

$$\boldsymbol{|\underline{H}(j \cdot \omega)| = G(\omega) = \frac{S_0}{E_0}}$$

Définition 4 – Phase du système : Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est l'argument de la fonction de transfert harmonique :

$$\boldsymbol{\varphi = arg(\underline{H}(j \cdot \omega))}$$

L'analyse harmonique consiste à étudier l'amplitude et la phase de la fonction de transfert harmonique, en fonction de la pulsation ω du signal.

III. Lieux de transfert de Bode

A. Diagramme de Bode :

Les systèmes étudiés s'étendent généralement sur de larges plages de fréquences (exemple, les cordes d'un piano oscillent à des fréquences comprises entre 27,5 et 4186 Hz). Une échelle linéaire pour l'axe des abscisses (correspondant à l'axe des pulsations ω) serait donc mal adaptée. On lui préfère une échelle logarithmique pour représenter l'évolution de la pulsation du signal. Elle correspond au tracé de logω sur un axe.

Figure 7 : *exemple d'échelle logarithmique*

> **Définition 5 – Diagramme de Bode :** Le diagramme de Bode est constitué de deux diagrammes semi-logarithmiques (axes des abscisses gradués en log(ω), et axes des ordonnées en échelle linéaire) :
> Le diagramme de gain, exprimé en décibel :
> $$GdB = 20 \cdot log\left(\left|\underline{H}(j \cdot \omega)\right|\right)$$
> Le diagramme de phase, exprimé en degrés ou radian :
> $$\varphi = arg(\underline{H}(j \cdot \omega))$$

L'exploitation complète de ces diagrammes nécessite une vision simultanée des deux courbes, elles figurent donc sur un même graphique avec l'axe des abscisses en commun (voir Figure 8).

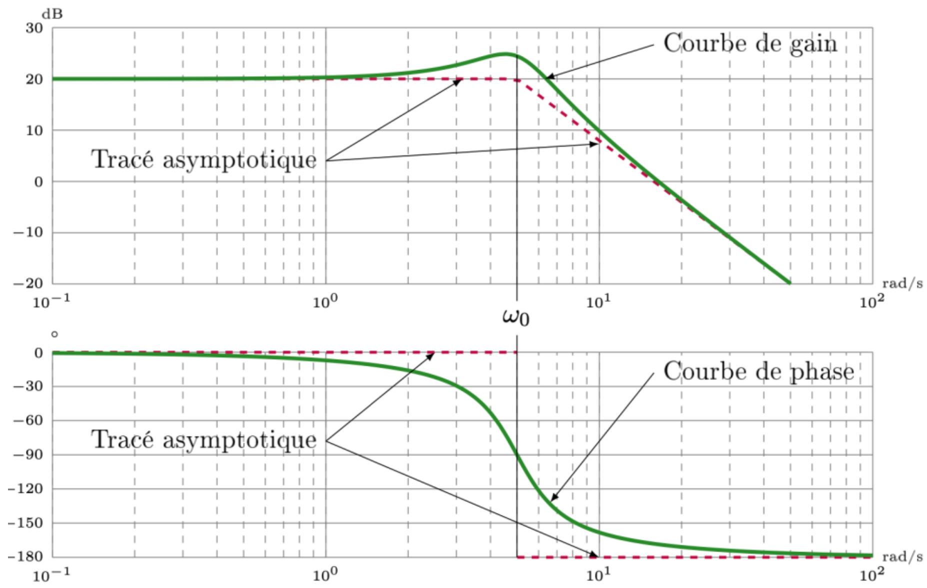


Figure 8 : *exemple de diagramme de Bode*

B. Tracé asymptotique du diagramme de Bode

Ces tracés approchés (asymptotiques) sont obtenus en remplaçant les courbes des diagrammes de Bode par leurs approximations asymptotiques. Ces diagrammes permettent d'apprécier globalement le comportement du système modélisé à 10 % ou 20 % près. Compte tenu des imprécisions sur les valeurs réelles des paramètres du modèle, une telle précision s'avère souvent suffisante (en général, l'approximation est moins bonne pour le diagramme de phase). Les calculs des asymptotes et des valeurs particulières se font en général pour les valeurs particulières et extrêmes de la pulsation ω par rapport à la pulsation de coupure ω_c du système :

C. Propriétés des diagrammes de Bode

> **Propriété 1 :** Le diagramme de Bode d'un produit de fonctions de transferts $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \underline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\underline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\omega})$ est la somme des diagrammes de Bode de fonctions $\underline{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\omega})$ et $\underline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\omega})$.

Si $\underline{H}(j\cdot\omega) = K\cdot\underline{F}(j\cdot\omega)$ avec K une constante positive alors :

- $GdB = 20\cdot log(|\underline{H}(j\cdot\omega)|)$, la courbe de gain de $\underline{F}(j\cdot\omega)$ est translatée de $20\cdot log(K)$
- $\varphi = \arg(\underline{H}(j\cdot\omega))$, a phase est la même que celle de $\underline{F}(j\cdot\omega)$

On utilise constamment ces propriétés car, dans la majorité des cas, la fonction de transfert étudiée est un produit de fonctions de transfert du premier et deuxième ordre. Ces deux systèmes seront donc étudiés en détails dans la suite de ce cours.

D. Bande Passante

On définit la bande passante comme la bande de fréquences à l'intérieur de laquelle l'atténuation du signal reste limitée à une valeur définie. Elle caractérise ainsi la « qualité » du système :

- en électronique : bande passante = intervalle de fréquence pour lequel le gain est supérieur au gain statique -3dB
- en automatique : la bande passante à -3 dB caractérise la rapidité du système en boucle fermée. Pour obtenir une bonne approximation de la rapidité, on peut aussi utiliser la bande passante à 0 dB (sur la FTBO).

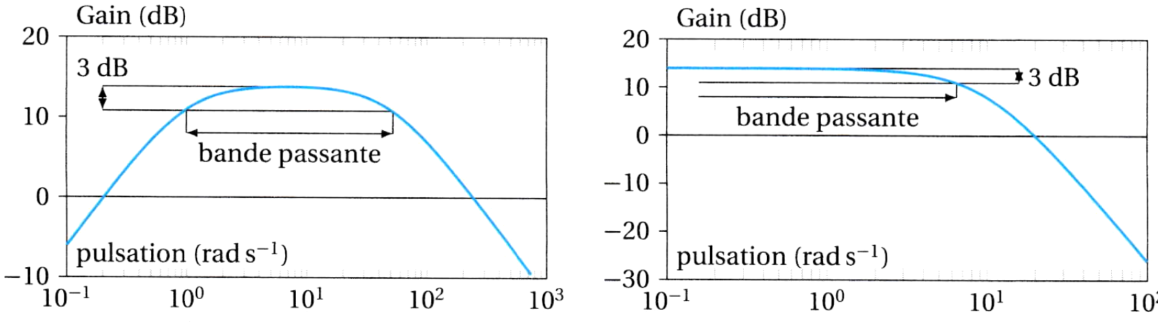


Figure 9 : *définition de la bande passante pour 2 types de système*