

SEQUENCE V

Seq. 5 - Chap. 2

Analyse harmonique des SLCI

Objectifs :

- ✓ Déterminer la réponse fréquentielle d'un système
- ✓ Tracer le diagramme de Bode
- ✓ Identifier la fonction de transfert d'un système à l'aide de sa réponse fréquentielle

Chapitre 2

Cours

Prévoir la réponse fréquentielle d'un système à partir de son modèle

Prérequis

- ✓ Séquence 2

Objectifs

- ✓ Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement du second ordre
- ✓ Déterminer la réponse temporelle d'un système du second ordre



Hendrik Wade Bode

PLAN DU CHAPITRE

I. Modèle proportionnel	2
II. Modèle dérivateur	2
III. Modèle intégrateur	3
IV. Modèle du premier ordre	4
A. Réponse harmonique	4
B. Diagramme de Bode en gain	4
C. Diagramme de Bode en Phase	5
V. Modèle du second ordre	6
A. Réponse harmonique	6
B. Diagramme de Bode en gain	6
C. Diagramme de Bode en phase	10

I. Modèle proportionnel

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est $H(p) = K$ ce qui donne dans le domaine fréquentiel : $H(j \cdot \omega) = K$ et donc $|H(j \cdot \omega)| = K$. On a donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

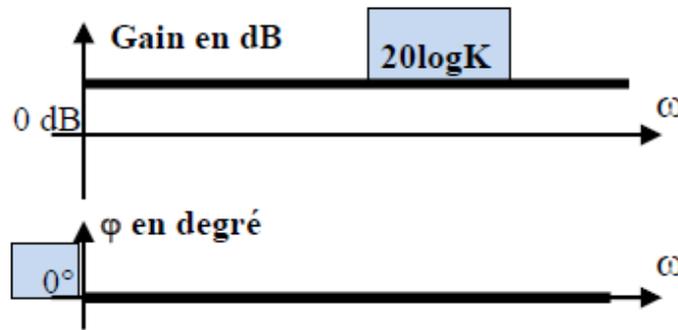


Figure 1 : diagramme de Bode pour un modèle proportionnel

II. Modèle dérivateur

- De degré 1 : $H(p) = K \cdot p$

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est $H(p) = K \cdot p$ ce qui donne dans le domaine fréquentiel $H(j \cdot \omega) = K \cdot j \cdot \omega$, donc $|H(j \cdot \omega)| = K \cdot \omega$. On a donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K + 20 \cdot \log \omega \\ \varphi = 90^\circ \end{cases}$$

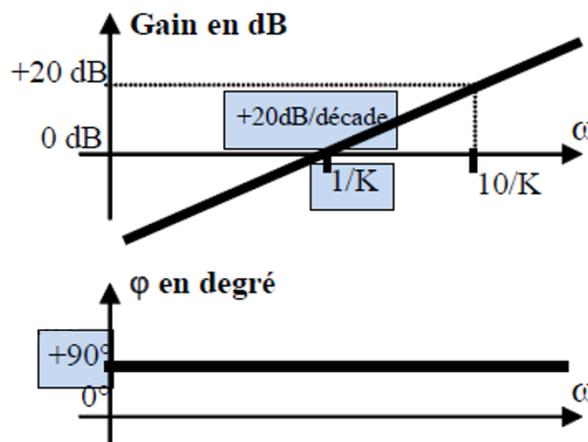


Figure 2 : diagramme de Bode pour un modèle dérivateur de degré 1

- De degré 2 : $H(p) = K \cdot p^2$

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est $H(p) = K \cdot p^2$ ce qui donne dans le domaine fréquentiel $H(j \cdot \omega) = K \cdot (j \cdot \omega)^2 = -K \cdot \omega^2$, donc $|H(j \cdot \omega)| = K \cdot \omega^2$. On a donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K + 40 \cdot \log \omega \\ \varphi = 180^\circ \end{cases}$$

On a donc :

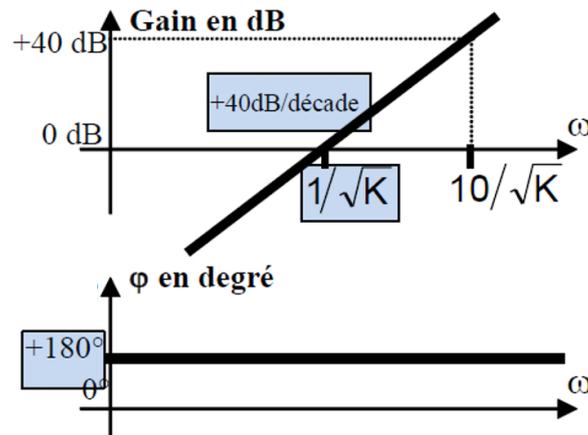


Figure 3 : diagramme de Bode pour un modèle dérivateur de degré 2

III. Modèle intégrateur

- De degré 1 : $H(p) = \frac{K}{p}$

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est $H(p) = \frac{K}{p}$ ce qui donne dans le domaine fréquentiel $H(j \cdot \omega) = \frac{K}{j \cdot \omega}$, donc $|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\omega}$. On a donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \omega \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$$

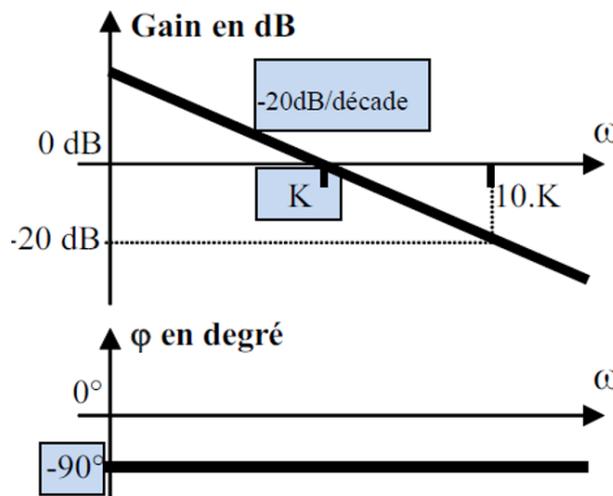


Figure 4 : diagramme de Bode pour un modèle intégrateur de degré 1

- De degré 2 : $H(p) = \frac{K}{p^2}$

La fonction de transfert dans le domaine de Laplace est $H(p) = \frac{K}{p^2}$ ce qui donne dans le domaine fréquentiel $H(j \cdot \omega) = \frac{K}{(j \cdot \omega)^2} = -\frac{K}{\omega^2}$, donc $|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\omega^2}$. On a donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log \omega \\ \varphi = -180^\circ \end{cases}$$

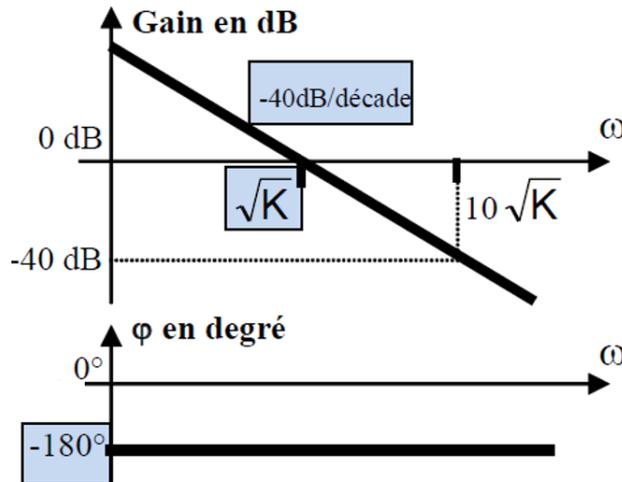


Figure 5 : diagramme de Bode pour un modèle intégrateur de degré 2

IV. Modèle du premier ordre

A. Réponse harmonique

La fonction de transfert d'un système du premier ordre standard dans le domaine de Laplace s'exprime sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

La fonction de transfert en fréquence s'écrit :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{1 + j \cdot \tau \cdot \omega}$$

D'où :

$$G_{dB} = |H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}}$$

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2}) \\ \varphi = \arg(H(j \cdot \omega)) = -\arg(1 + j \cdot \tau \cdot \omega) = -\arctan\left(\frac{\tau \cdot \omega}{1}\right) \end{cases}$$

B. Diagramme de Bode en gain

On étudie la courbe du gain en décibels du système :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega)^2})$$

Pulsation	Gain	Gain en dB	Tendance courbe
$\omega \rightarrow 0$	$G(\omega) \rightarrow K$	$G_{dB} \approx 20 \cdot \log K$	Asymptote horizontale
$\omega \rightarrow +\infty$	$G(\omega) \rightarrow \frac{K}{\tau \cdot \omega}$	$G_{dB} \approx 20 \cdot \log \frac{K}{\tau} - 20 \cdot \log \omega$	Asymptote oblique de pente -20dB par décade

Les deux asymptotes se coupent pour la valeur de ω_c telle que :

$$20 \cdot \log K = 20 \cdot \log \frac{K}{\tau} - 20 \cdot \log(\omega_c)$$

$$20 \cdot \log \tau - 20 \cdot \log(\omega_c) = 0$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Cette pulsation particulière ω_c est appelée pulsation de coupure. Du fait du tracé en échelle logarithmique, la courbe reste proche de ses asymptotes sur une grande partie du graphique. Les courbes réelles et asymptotiques sont tracées ci-dessous. La distance entre la courbe réelle et ses asymptotes est déterminée en calculant la valeur du gain pour la pulsation de coupure ω_c :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log(\sqrt{1 + (\tau \cdot \omega_c)^2})$$

$$G_{dB} \approx 20 \cdot \log K - 3dB$$

La valeur du gain à la pulsation de coupure est donc inférieure de 3dB à l'asymptote horizontale.

C. Diagramme de Bode en Phase

De la même façon, on étudie la courbe de la phase du système en fonction de ω .

Pulsation	Phase	Tendance courbe
$\omega \rightarrow 0$	$\varphi(\omega) \rightarrow 0$	Asymptote horizontale
$\omega \rightarrow +\infty$	$\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$	Asymptote horizontale

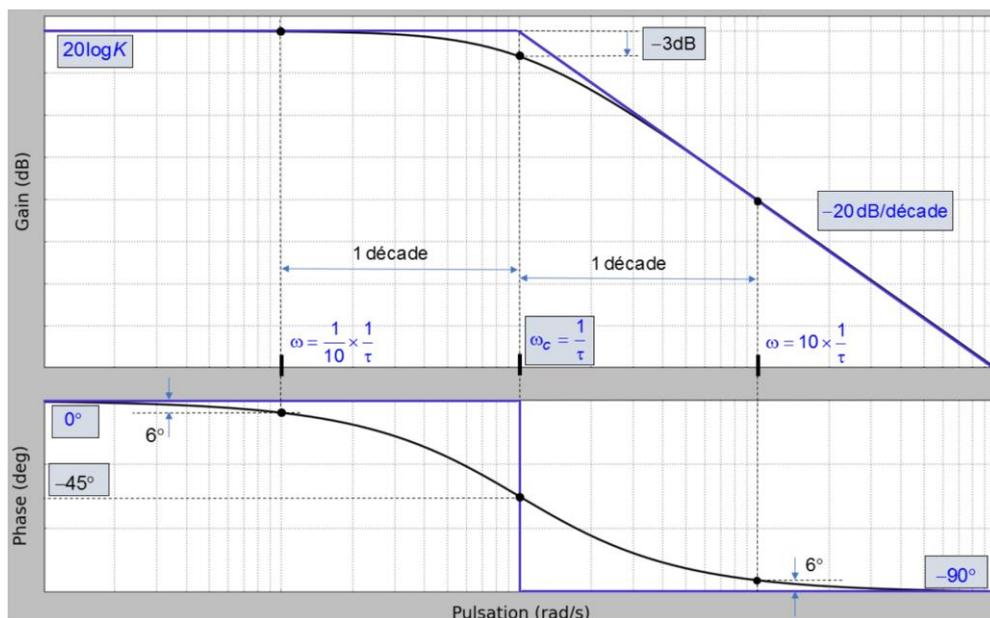


Figure 6 : diagramme de Bode pour un modèle du premier ordre

Le calcul de la valeur de la phase φ à la pulsation de coupure ω_c donne :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\tau \cdot \omega_c}{1}\right)$$

$$\varphi = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

V. Modèle du second ordre

A. Réponse harmonique

On rappelle que la fonction de transfert d'un système du second ordre standard s'exprime sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

D'où la fonction de transfert en fréquence :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot (j \cdot \omega)^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot j \cdot \omega + 1} = \frac{K}{1 - \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\omega)^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot j \cdot \omega}$$

Soit :

$$|H(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\omega)^2\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \omega\right)^2}}$$

Donc :

$$\begin{cases} G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log\left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\omega)^2\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \omega\right)^2}\right) \\ \varphi = \arg(H(j \cdot \omega)) = -\arctan\left(\frac{\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \omega}{1 - \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\omega)^2}\right) \end{cases}$$

B. Diagramme de Bode en gain

Nous venons de montrer que pour un système du second ordre :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log\left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\omega_0^2} \cdot (\omega)^2\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot \omega\right)^2}\right)$$

De la même façon que pour le premier ordre, étudions les tendances de la courbe du gain en décibels du système en fonction de ω .

Pulsation	Gain	Gain en dB	Tendance courbe
$\omega \rightarrow 0$	$G(\omega) \rightarrow K$	$G_{dB} \approx 20 \cdot \log K$	Asymptote horizontale
$\omega \rightarrow +\infty$	$G(\omega) \rightarrow -\frac{K}{\omega^2}$	$G_{dB} \approx 20 \cdot \log\left(-\frac{K\omega_0^2}{\omega^2}\right)$	Asymptote oblique de pente -40dB par décade

Nous pouvons donc tracer une tendance asymptotique du diagramme de Bode en gain d'un système du second ordre suivant.

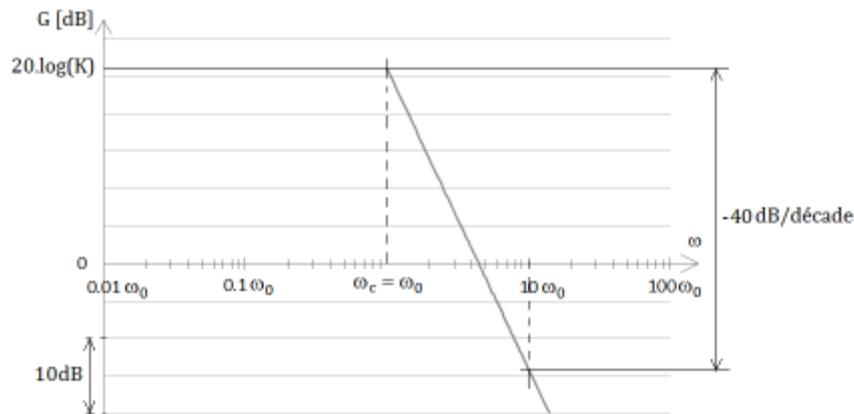


Figure 7 : diagramme de gain pour un modèle du second ordre

Afin de déterminer la courbe réelle du diagramme, nous allons distinguer, comme lors de l'étude temporelle, différents cas associés aux différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ .

- **Cas $\xi > 1$: Régime apériodique**

On rappelle que la fonction de transfert de ce système admet deux pôles réels strictement négatifs :

$$p_1 = -\xi \cdot \omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$p_2 = -\xi \cdot \omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Elle peut donc s'écrire sous la forme :

$$H(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)}$$

On pose alors :

$$p_1 = \frac{1}{\tau_1}$$

$$p_2 = \frac{1}{\tau_2}$$

On a alors :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (p - \tau_2 \cdot p)}$$

Ce qui induit la fonction de transfert fréquentielle suivante :

$$H(p) = K \cdot \frac{1}{(1 + j \cdot \tau_1 \cdot \omega)} \cdot \frac{1}{(p + j \cdot \tau_2 \cdot \omega)}$$

On a alors :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \sqrt{1 - (\tau_1 \cdot \omega)^2} - 20 \cdot \log \sqrt{1 - (\tau_2 \cdot \omega)^2}$$

Le gain en décibel d'un système du second ordre, avec $\xi > 1$ peut donc être interprété comme étant la somme des gains en décibels de deux systèmes du premier ordre, de constantes de temps respectives τ_1 et τ_2 . Graphiquement, cette interprétation nous permet de tracer plus précisément le diagramme de Bode en gain d'un système du second ordre fortement amorti.

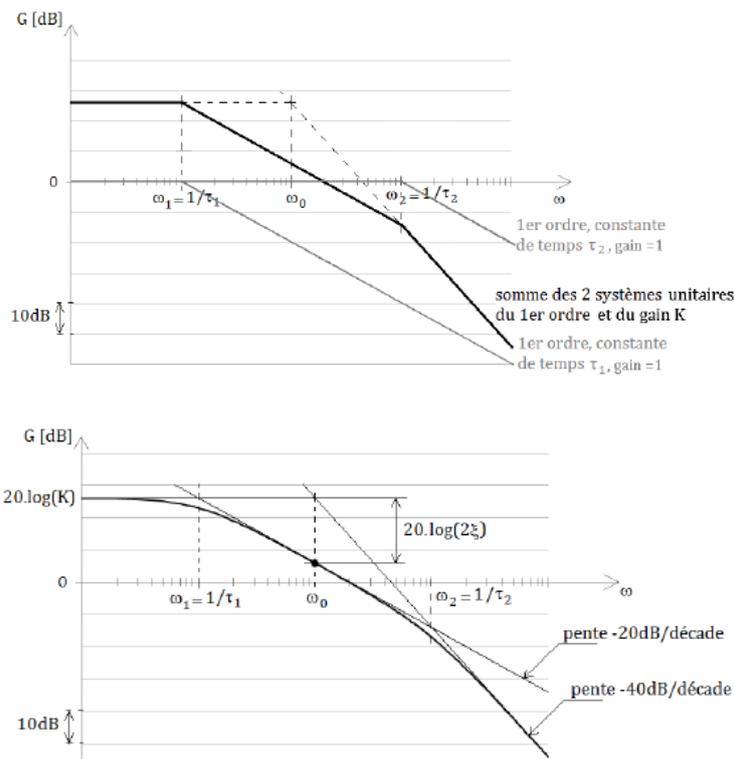


Figure 8 : diagramme de gain pour un modèle du second ordre, régime aperiodique

- **Cas $\xi = 1$: Régime aperiodique critique**

Dans ce cas particulier, la fonction de transfert du système du second ordre admet un pôle réel double ω_0 . Le diagramme de Bode en gain est donc déduit de l'étude précédente.

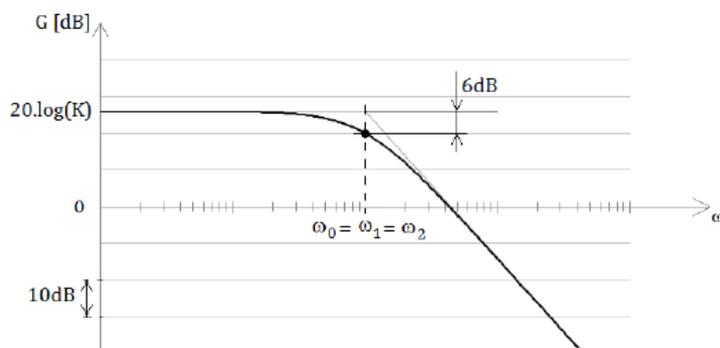


Figure 9 : diagramme de gain pour un modèle du second ordre, régime aperiodique critique

- **Cas $\xi < 1$: Régime pseudo-périodique**

L'expression du gain d'un système du second ordre laisse supposer que pour certaines valeurs du coefficient d'amortissement ξ , le gain à la pulsation de coupure peut être supérieur au gain statique.

Nous pouvons en déduire que lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le gain croît de $20\log K$ jusqu'à une valeur maximale, puis décroît en rejoignant son asymptote en $+\infty$. Ce phénomène est appelé résonance. Le phénomène de résonance ne pourra apparaître que pour des coefficients d'amortissement inférieurs $1/\sqrt{2}$

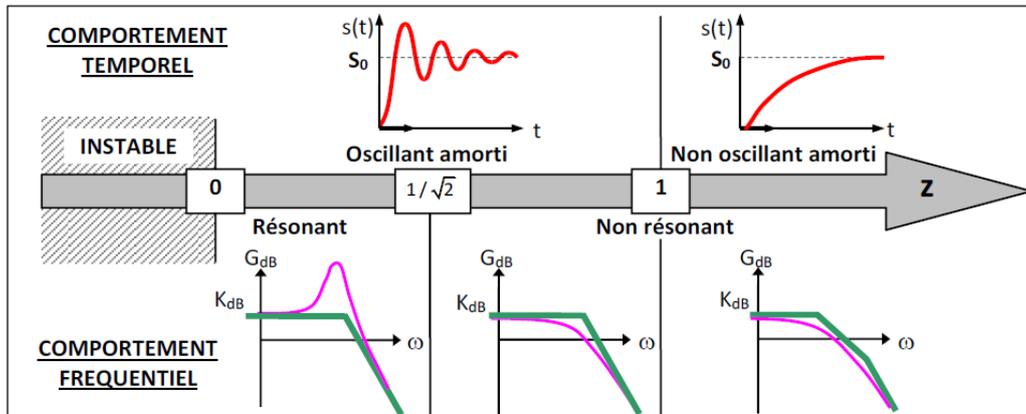


Figure 10 : influence du coefficient d'amortissement sur l'instabilité

Le diagramme de Bode en gain pour un système du second ordre avec $\xi < 0,7$ est tracé ci-dessous

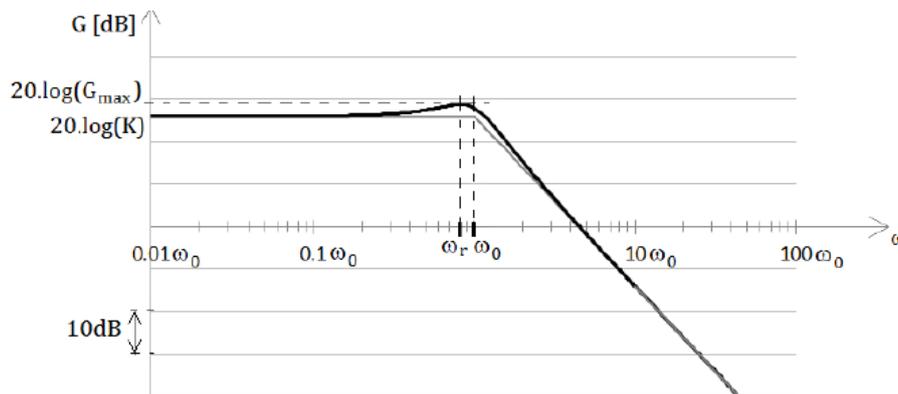


Figure 11 : diagramme de gain pour un modèle du second ordre, régime pseudopériodique ($\xi < 0,7$)

La figure suivante présente l'évolution du gain en décibels en fonction du coefficient d'amortissement.

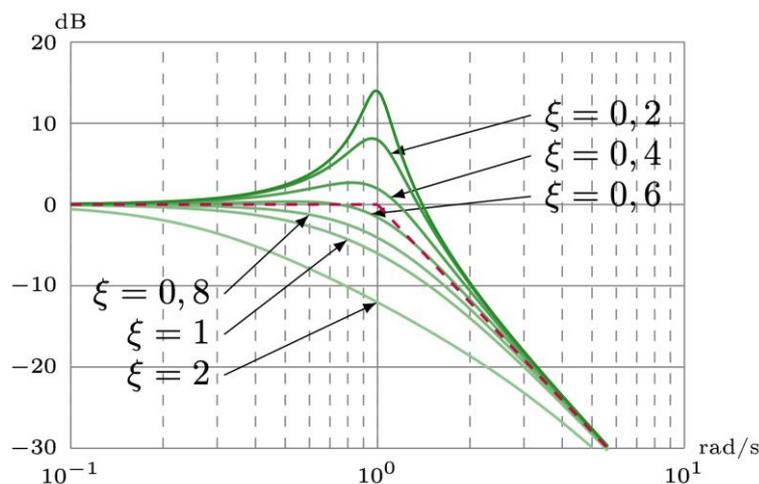


Figure 12 : diagramme de gain pour un modèle du second ordre, régime pseudopériodique pour différentes valeurs de ξ

C. Diagramme de Bode en phase

- Cas $\xi > 1$: Régime apériodique

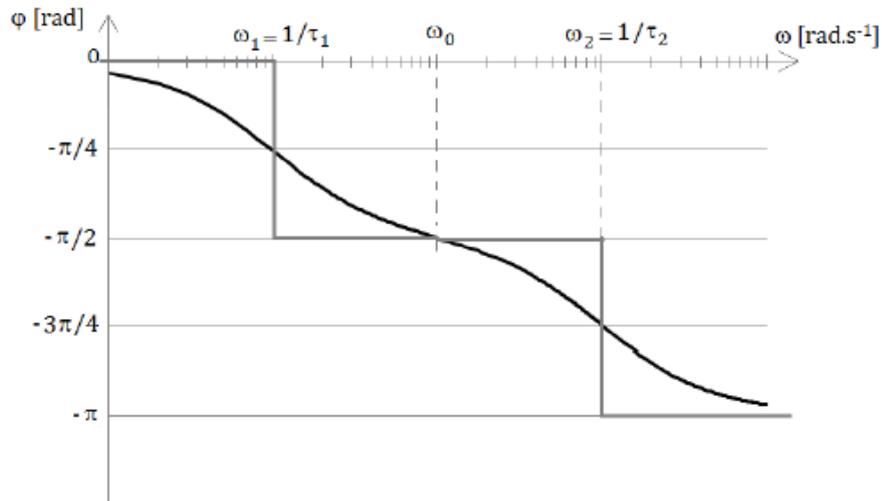


Figure 13 : diagramme de phase pour un modèle du second ordre, régime apériodique

- Cas $\xi = 1$: Régime apériodique critique

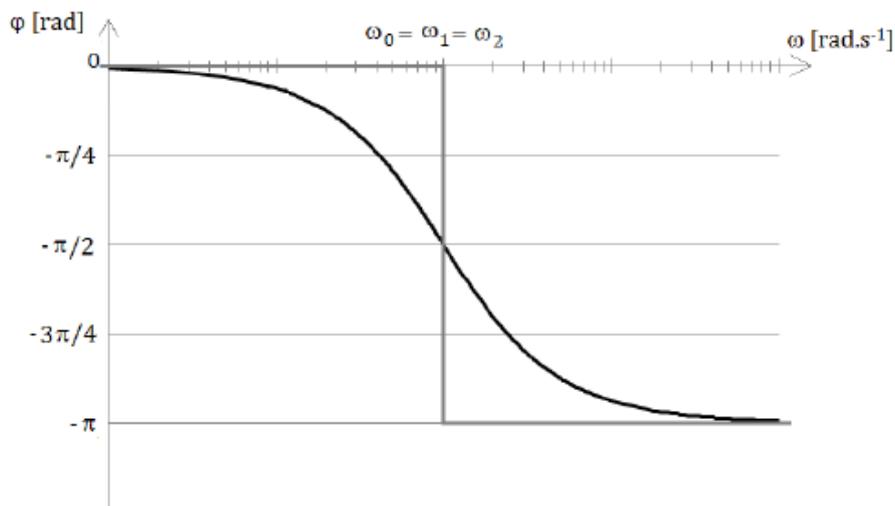


Figure 14 : diagramme de phase pour un modèle du second ordre, régime apériodique critique

- Cas $\xi < 1$: Régime pseudo-périodique

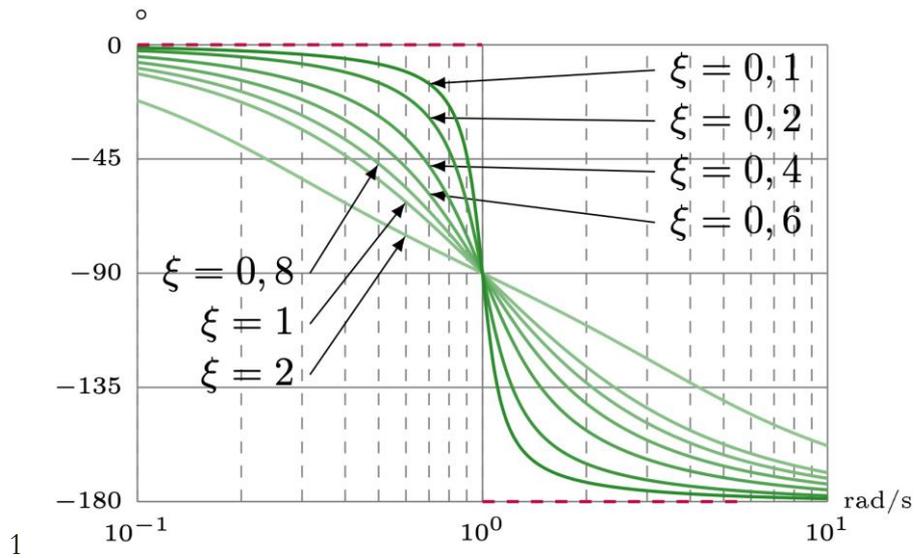


Figure 15 : diagramme de phase pour un modèle du second ordre, régime pseudopériodique ($\xi < 0,7$)